R

286

[illegible]eschenk an die k. Akad. der Wiss.

Math. L.

59 k – 1

<36635608550016

<36635608550016

Bayer. Staatsbibliothek

R

Lehrbuch

der

Geometrie und Trigonometrie

zum

Gebrauche in den Schulen

und

zum Selbstunterrichte,

von

Johann von Gott Bundschue,

Professor der höheren Mathematik an dem königlich-baierischen Lyzeum zu Dilingen, und korrespondirendem Mitgliede der allgemeinen kameralistisch-ökonomischen Gesellschaft zu Erlangen.

R

Erster Theil,

welcher die Longimetrie und Planimetrie enthält.

Mit 9 Figuren-Tafeln.

Kempten, 1819.
Gedruckt und im Verlage bei Dannheimer.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Seiner Exzellenz

dem

Hochwohlgebornen

Herrn General-Kommissär

und

Präsidenten

der

Königlich-Baierischen Regierung

des

Ober-Donau-Kreises

Carl Ernst

Freiherrn von Gravenreuth,

Königlichem Kämmerer und wirklichem Staats-Rathe im außerordentlichen Dienste,

wie auch

Groß-Kreuz des Zivil-Verdienst-Ordens der Baierischen Krone und Inhaber des Herrschafts-Gerichtes Affing,

widmet

dieses Denkmal

tiefer Ehrfurcht

Der Verfasser.

Euere Exzellenz,

Hochwohlgeborner

Herr Staats-Rath und Regierungs-Präsident!

Seitdem mir das hohe Glück zu Theil ward, unter Euerer Exzellenz weisen Leitung in der mir zugewiesenen Sphäre zu wirken, gaben Sie mir bei allen Veranlassungen wiederholte Beweise eines vorzüglich gnädigen Wohlwollens gegen mich, und beurkundeten dieses letztere auch neuerdings dadurch, daß Sie mir mit ganz besonderer Huld erlaubten, mit Ihrem erhabenen Namen meine gegenwärtige Schrift zu verherrlichen.

Es ist für mich eine nicht geringe Aufmunterung, daß ich dem in jeder Hinsicht ausgezeichneten Staatsmanne und würdigsten Vorstande des Kreises eines meiner Geistesprodukte weihen darf. Ich werde mich gewiß nach Kräften bestreben, der mir erwiesenen vielen Gnaden und des geschenkten hohen Zutrauens mich immer würdig zu erhalten, und werde stets treu und gewissenhaft die Pflichten meines Berufes erfüllen, und mit unermüdetem Eifer an der Verfas-

sung und Ausarbeitung benöthigter zweckmäßiger Schulschriften fortfahren, um dem Vaterlande und der studirenden Jugend so viel zu nützen, als in meinen Kräften steht.

Indem ich Euerer Exzellenz für Ihre gegen mich besonders bethätigte Gewogenheit meine tiefgerührte Dankbarkeit bezeuge, bin ich Ihnen noch ganz vorzüglich für die Verbreitung des mathematischen Studiums, so wie für die Aufnahme und Einführung meiner Lehrbücher an den königlichen Studien-Anstalten des Ober-Donau-Kreises verbunden und dankverpflichtet.

Ich empfehle mich Euerer Exzellenz unter Angelobung der gewissenhaftesten Pflichtstreue zu ferneren hohen Gnaden, und geharre mit tiefer Ehrfurcht

Euerer Exzellenz

Dilingen,
den 15. August 1818.

unterthänig gehorsamster,
dankschuldigster
Johann von Gott Bundschue,
Lyzeal-Professor.

Vorrede.

Ich übergebe hier dem Publikum den ersten Theil meines Lehrbuches der Geometrie und Trigonometrie, welcher die Longimetrie und Planimetrie enthält; bis künftige Ostern erscheint der zweite Theil, in den ich die Stereometrie und praktische Geometrie sammt der ebenen Trigonometrie aufnehmen werde.

Ich bin zur Bearbeitung dieses Lehrbuches um so mehr aufgefordert, da meine Arithmetik sowohl an den königlich-baierischen Gymnasien, und in den lateinischen Vorbereitungs- und höheren Bürgerschulen des Ober-Donau-Kreises, als auch an dem diesortigen königlichen Lyzeum und an mehreren königl. Studien-Anstalten außer dem Kreise als allgemeines Lehrbuch eingeführt ist, und der Herr Konrektor und Ordens-Ritter Kanonikus Stark, dann die Herren Studien-Rektoren Gruber, Böhm &c. den gegenwärtigen ersten Band des geometrischen Lehrbuches bereits für die Ober-Gymnasial-Klassen zu Augsburg, Dilingen, Kempten &c. zum Schulbuche bestimmten, und zum Theile schon in diesem Studien-Jahre darnach lehrten, während mir dasselbe bei meinen öffentlichen Vorlesungen über Geometrie und Trigonometrie als Leitfaden dient, damit auf diese Weise die Mathematik in den vorausgehenden niederen, und in den höheren Gymnasial- und Lyzeal-Klassen nach einem und dem nämlichen Lehrbuche vorgetragen wird.

Indem ich im arithmetischen Lehrbuche die mathematischen Werke, die ich benützte, namentlich anführte, habe ich zugleich auch größtentheils diejenigen Schriften genannt, die ich bei der Bearbeitung des Lehrbuches der Geometrie und Trigonometrie zum Grunde legte; um deßwillen zähle ich dieselben nicht neuerdings auf, und bemerke nur, daß ich auch bei der Verfassung des geometrischen Lehrbuches ganz vorzüglich das schätzbarste mathematische Lehrbuch des Herrn geistlichen Rathes und Stadtpfarrers Prof. Magold, und die Hefte benützte, die ich mir am kön. Lyzeum zu Dilingen sammelte, als ich mehrere Jahre hindurch den mathematischen Vorlesungen meines unvergeßlichen und vortrefflichen Lehrers, des k. baier. Herrn Kollegien-Rathes und Professors D. Ferdinand Mahir, beiwohnte.

Die aus der Arithmetik vorkommenden Sätze zitire ich hier z. B. auf diese Weise: „Arithm. I. §. 24., oder Arithm. IV. §. 44.“, anstatt daß ich mich ausdrücke: „man sehe im I. Theile meines Lehrbuches der Arithmetik den §. 24., oder im IV. Theile desselben den §. 44.“

Die bisher in diesem Theile bemerkten Druckfehler findet man am Ende nach der Inhalts-Anzeige verbessert.

Dilingen den 15. August 1818.

Professor Bundschue.

Einleitung in die Geometrie.

Vorläufige Begriffe.

§. 1.
Ausgedehnte Größe und Geometrie.

a) Eine stätige Größe (Arithmetik I. §. 2. a.) heißt ausgedehnt, wenn ihre Theile ausserhalb einander sind.

b) Die Wissenschaft von den stätigen ausgedehnten Größen heißt Geometrie, was schon im I. Theile des Lehrbuches der Arithmetik im §. 6. b. gesagt wurde.

I. Zusatz: Ausgedehnte Größen, die einander vollkommen decken, oder genau in einander passen, sind kongruent (Arithm. I. §. 2. h.); weil dann alle ihre Theile der Ordnung nach einerlei Größe und Lage, und deßhalb die nämliche Quantität und Qualität haben.

II. Zusatz: Und umgekehrt kongruente ausgedehnte Größen decken einander, oder passen in einander, weil sie sonst nicht gleiche Quantität und Qualität hätten, und also auch nicht kongruent sein könnten.

III. Zusatz: Kongruente ausgedehnte Größen sind ganz einerlei, und können für einander gesetzt werden (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.).

IV. Zusatz. Da es außer Zeit und Raum keine andere ausgedehnte stätige reine Größen gibt, so macht die Ausdehnung der Zeit und des Raumes den Gegenstand der reinen Geometrie aus. (Arithm. I. §. 6.)

§. 2.

Körper, Fläche, Linien und Punkt.

a) Ein allenthalben oder völlig begränzter Raum ist das, was ein geometrischer Körper genannt wird;

b) Die Gränze des Körpers, oder die Ausdehnung desselben an seinen Gränzen heißt eine geometrische Fläche;

c) Die Gränze der Fläche, oder die Ausdehnung der Fläche an ihren Gränzen heißt eine geometrische Linie; und

d) Die Gränze einer Linie wird ein geometrischer Punkt genannt.

I. Zusatz: Weil die Gränze eines Dinges nicht ein Theil, sondern nur das Aufhören desselben ist, so ist die Fläche nicht ein Theil des Körpers, die Linie nicht ein Theil der Fläche, und der Punkt nicht ein Theil der Linie; um deßwillen kann man nicht sagen, daß der geometrische Körper aus Flächen, die Fläche aus Linien, und die Linie aus Punkten bestehe oder zusammengesetzt sei.

II. Zusatz: Die geometrischen Körper, Flächen, Linien und Punkte sind nicht gleichartige Dinge, weil sie nicht Theile von einander sind, und jeder Theil mit dem Ganzen gleichartig ist: wohl aber ist jeder Theil eines geometrischen Körpers selbst ein Körper, jeder Theil einer Fläche selbst eine Fläche, und jeder Theil einer Linie selbst eine Linie.

III. Zusatz: Die geometrischen Flächen und Linien sind ausgedehnte stätige Größen (§. 1.), wie die körperlichen Räume, die Punkte aber sind unausgedehnt, und die letzte Gränze alles Ausgedehnten im Raume; deßhalb gibt es im Raume dreierlei Arten von ausgedehnten Größen, nämlich körperliche Räume, Flächen und Linien, und dreierlei Arten von Gränzen der Ausdehnung, als geometrische Flächen, Linien und Punkte.

IV. Zusatz: Ein geometrischer Körper hat drei Dimensionen oder Abmessungen, nämlich eine Ausdeh-

nung nach Länge, Breite und Höhe; eine Fläche hat zwei Dimensionen, nach Länge und Breite; eine Linie hat nur eine Dimension nach Länge; und der Punkt hat gar keine Dimension oder Ausdehnung.

V. Zusatz: Alle geometrischen Punkte sind an sich betrachtet, völlig einerlei, weil sie keine Theile haben, und in ihnen nichts Gleichartiges ist, und somit alle rücksichtlich ihrer Quantität einerlei sind, gleichwie sie alle, da sie nur Gränzen der Linien sind, die nämliche Qualität haben. Die geometrischen Linien und Flächen sind kongruent, wenn sie sich vollkommen decken, folglich so auf einander gelegt werden können, daß ihre Gränzen genau zusammen passen, und die geometrischen Körper sind kongruent, oder haben gleiche Qualität und Quantität, wenn sie genau in einander passen (§. 1. Zus. I.).

VI. Zusatz: Die Zeit, welche nur eine Dimension nach Länge hat, ist durch eine Linie, mithin durch eine Dimension des Raumes darstellbar; um deßwillen ist die reine Geometrie die Wissenschaft des Raumes (§. 1. Zus. IV.).

Anmerkung: 1) Auf dem bisher Gesagten beruht die Vorstellung von einer Ausdehnung nach Länge, Breite und Dicke. Da die Linie nur den unausgedehnten Punkt zur Gränze hat, so geht ihre Ausdehnung nur nach einer Seite, die wir Länge nennen.

Die Fläche hat schon Linien zu Gränzen, folglich sind in ihr auf jeder Linie noch unzählig viele andere möglich, die nach einer anderen Seite, als jene, gehen, und die wir daher zum Unterschiede von der ersteren, Breite nennen.

Der körperliche Raum hingegen hat Flächen zu Gränzen, daher sind in ihm auf jeder Fläche noch unzählig viele andere Linien möglich, die nach einer anderen Seite, als nach ihrer Länge und Breite, gehen, und die wir daher die Dicke, Höhe oder Tiefe nennen.

Auf diese Weise stellen wir uns eine Linie bloß als Länge, eine Fläche bloß als eine Ausdehnung nach Länge und Breite, und einen körperlichen Raum als eine Ausdehnung nach Länge, Breite und Dicke vor.

2) Geometrische Punkte, Linien und Flächen können nicht gezeichnet werden. So fein auch die Zeichnung

sein mag, so sind alle unsere gezeichneten Punkte, Linien und Flächen schon physische Körper, die eine Länge, Breite und Dicke haben. Daher müssen wir bei den gezeichneten Punkten von aller Ausdehnung überhaupt, bei den gezeichneten Linien von aller Breite und Dicke, und bei den gezeichneten Flächen von aller Dicke in Gedanken abstrahiren, und unsere gezeichneten Punkte, Linien und Flächen zeigen nur an, wo mathematische Punkte, Linien und Flächen gedacht werden müssen.

3) Eine ausgedehnte stätige Größe wird in zwei Theile getheilt, wenn man die gemeinschaftliche Gränze der beiden Theile bestimmt, und Körper werden durch Flächen, Flächen durch Linien, und Linien durch Punkte getheilt.

4) Wenn gleich die Linie nicht aus Punkten besteht oder zusammengesetzt ist, so kann man doch in einer Linie überall nach Belieben in ihrer Ausdehnung Punkte annehmen, weil sich bei derselben überall ihr Anfang oder ihr Ende denken läßt.

Auf eine ähnliche Weise, und aus dem nämlichen Grunde lassen sich nach Belieben bei Flächen Linien, und bei Körpern Flächen annehmen.

5) Wenn man sagt, daß Linien durch Linien, und Flächen durch Flächen getheilt werden, so durchschneiden sich die Linien und Flächen, und dieses geschieht bei Linien in Punkten, und bei Flächen in Linien, da bei Linien die Gränzen der Theile, welche wieder Linien sind, durch Punkte, und bei Flächen die Gränzen der Theile, die ebenfalls Flächen sind (§. 2. Zus. II.), durch Linien bestimmt werden.

§. 3.

Gerade und krumme Linien, dann gerad gebrochene und krumm gebrochene, wie auch gemischte Linien.

a) Eine Linie heißt **gerad** (linea recta), wenn alle ihre Theile einerlei Richtung haben; daher ist (Fig. 1.) die Linie AB eine gerade Linie, wenn alle ihre Theile nach einer Richtung liegen.

b) Eine Linie heißt **krumm** (linea curva), wenn kein Theil derselben gerade ist; wie (Fig. 2.) die Linie CD.

c) Eine Linie heißt eine **gerad gebrochene**, oder **gebrochene gerade** Linie, wenn sie aus ver-

schiedenen geraden Linien zusammengesetzt ist; wie (Fig. 3.) die Linie ABCDE.

d) Eine Linie, welche aus verschiedenen krummen Linien zusammengesetzt ist, heißt eine krumm gebrochene, oder gebrochene krumme Linie; wie (Fig. 4.) die Linie ABCD.

e) Endlich wird eine Linie eine gemischte Linie genannt, wenn sie aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt ist; wie (Fig. 5.) die Linie ABCDE.

I. Zusatz: Von einem Punkte A (Fig. 1.) zum anderen B ist allemal eine gerade Linie möglich, und diese kann durch ihre Endspunkte A und B nach beiden Seiten ohne Ende verlängert werden.

II. Zusatz: Von einem Punkte A (Fig. 1.) zum anderen B ist nur eine einzige gerade Linie möglich, und diese ist zwischen beiden Punkten A und B die kürzeste, weil jede andere Linie, welche die nämlichen Endspunkte A und B hat, und mit der geraden Linie nicht zusammenfällt, wegen der verschiedenen Richtung ihrer Theile krumm sein muß, und die gerade Linie AB vom Punkte A zum Punkte B so hingehet, daß sie weder auf die eine, noch auf die andere Seite abweichet, was bei einer krummen oder gebrochenen Linie, die zwischen diesen beiden Punkten A und B° gezogen wird, der Fall nicht ist. Daher wird auch die gerade Linie AB die Entfernung des Punktes A vom Punkte B genannt.

III. Zusatz: Durch zwei Punkte ist die Lage einer geraden Linie, und durch die Endspunkte zugleich die Größe derselben bestimmt.

IV. Zusatz: Zwei gerade Linien durchschneiden einander nur in einem Punkte; denn hätten sie zwei oder mehrere Punkte gemein, so hätten sie die nämliche Lage (Zus. III.), und würden sich nicht schneiden, da sie in eine einzige gerade Linie zusammen fallen, und nach einerlei Richtung über einander liegen würden.

V. Zusatz: Alle geraden Linien sind von gleicher Qualität; um deßwillen sind zwei gleich lange gerade

Linien kongruent, und umgekehrt sind alle kongruenten geraden Linien gleich lang.

Anmerkung: Gerade Linien werden mit zwei Buchstaben bezeichnet, die man gewöhnlich an die Endspunkte hinschreibt, manchmal aber mit einem Buchstaben, den man in die Mitte der Linie hinschreibt; und krumme, wie auch gebrochene Linien werden mehrentheils der Deutlichkeit wegen mit mehr als zwei Buchstaben bezeichnet.

§. 4.

Ebene, krumme Fläche.

a) Eine Fläche heißt eben (Superficies plana), oder eine Ebene (Planum), wenn jede gerade Linie, die man von irgend einem Punkte derselben zu einem anderen in ihr zieht, ganz in der Fläche liegt.

b) Eine Fläche heißt krumm, wenn kein Theil von ihr eben ist.

Zusatz: Eine gerade Linie, von welcher zwei Punkte in einer Ebene sind, liegt ganz in dieser Ebene.

Anmerkung: 1) Aus der Abtheilung der Linien in gerade und krumme Linien (§. 3.), und aus der der Flächen in Ebenen, und krumme Flächen folgt die Eintheilung der Geometrie in die Elementar- und höhere Geometrie (Arithm. I. §. 7. b.).

2) Wenn eine Ebene durch eine gerade Linie von unbestimmter Größe getheilt wird (§. 2. Anmerk. 3.), so haben die beiden Theile der Ebene gegen diese Linie eine entgegengesetzte Lage; liegt z. B. der eine Theil rechts, so liegt der andere links.

3) Liegt ein Punkt, oder eine Linie weder in einer Ebene, noch in ihrer Verlängerung, so sagt man, der Punkt oder die Linie liege außerhalb dieser Ebene; eben so liegt ein Punkt außerhalb einer geraden Linie, wenn er weder in ihr selbst, noch in ihrer Verlängerung liegt.

4) Mechanisch werden die geraden Linien mittels der Regel oder des Lineals auf dem Papier gezeichnet, oder vielmehr auf diese Weise nur die Stellen bezeichnet, wo die geometrischen geraden Linien gedacht werden müssen.

§. 5.

Eintheilung der Geometrie in die Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie.

a) Jener Theil der Geometrie, in welchem die

Lage und Größe, und die Verhältnisse der Linien bestimmt werden, heißt **Longimetrie**;

b) Jener Theil, in welchem von der Größe und den Verhältnissen der Flächen gehandelt wird, heißt **Planimetrie**, indem man sich dabei größten Theiles auf Ebenen, die den krummen Flächen zum Grunde liegen, beschränkt;

c) Endlich wird jener Theil der Geometrie, welcher von Körpern handelt, und die körperlichen Räume zum Hauptgegenstande hat, **Stereometrie** genannt.

Zusatz: Die Geometrie besteht also aus drei Haupttheilen, nämlich aus der Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie.

Anmerkung: In der Longimetrie und Planimetrie, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angezeigt ist, wird immer vorausgesetzt, daß sich alle Punkte und Linien in der nämlichen Ebene befinden.

§. 6.

Bestimmung, in wie fern eine ausgedehnte Größe von gewisser Art gegeben ist.

Wenn für gewisse Stücke in jeder beliebig angenommenen Lage nicht mehr als eine ausgedehnte Größe von gewisser Art möglich ist, so sagt man, daß die Größe und alle übrigen Stücke derselben durch die angenommenen Stücke **gegeben** oder **vollkommen bestimmt** sind.

Zusatz: Wenn eine ausgedehnte Größe durch gewisse Stücke gegeben ist, so sind alle Größen von derselben Art, in welchen jene Stücke kongruent sind, selbst kongruent.

Sind nämlich die angenommenen Stücke in zwei ausgedehnten Größen kongruent, so lassen sie sich völlig substituiren, das ist, die Stücke der zweiten Größe lassen sich völlig da denken, wo die Stücke der ersten liegen.

Nun aber ist nach der Voraussetzung durch die angenommenen Stücke der ersten Größe diese selbst gegeben, folglich ist in ihrer angenommenen Lage nur

eine ausgedehnte Größe von dieser Art möglich; um deßwillen muß in dieser Lage die ganze zweite Größe völlig da liegen, wo die erste lag, und die beiden Größen sind kongruent.

Anmerkung: 1) Auf dem so eben Gesagten beruht die ganze Beurtheilung der Kongruenz ausgedehnter Größen.

Von ausgedehnten Größen, nämlich von Linien, Flächen und Körpern, welche kongruent sind, sagt man gewöhnlich, sie decken einander, oder sie passen auf oder in einander (§. 1. Zus. I — III.), d. h., sie lassen sich in Gedanken völlig substituiren, und sind daher rücksichtlich ihrer Qualität und Quantität vollkommen einerlei, mithin bloß dem Orte nach verschieden, so daß sie, wenn man sich dieselben zugleich an dem nämlichen Orte vorstellen wollte, nur ein einziges Ding sein würden.

Will man nun beurtheilen, ob zwei ausgedehnte Größen kongruent sind, so darf man ihre Substitution nicht erst jedesmal wirklich vornehmen, sondern nur zeigen, durch welche Stücke die Größe gegeben, oder vollkommen bestimmt wird, weil dann bei solchen Größen die übrigen Stücke auch kongruent sein, oder sich decken müssen.

2) Wenn ich mich von nun an auf eine Annahme oder Voraussetzung berufe, so werde ich es mehrentheils durch den lateinischen Ausdruck „per hypothesin“, ex hypothesi oder kürzer „per hyp.“, ex hyp. bezeichnen, welches dann eben so viel heißt, als „der Annahme gemäß oder nach der Voraussetzung.“

3) Auf eine ähnliche Weise werde ich mich des Ausdruckes „ex constructione“, oder kürzer „ex constr.“ bedienen, wenn ich dadurch anzeigen will, daß irgend ein Satz der vorgenommenen Zeichnung gemäß richtig ist; beschreibe ich z. B. eine gerade Linie, welche einer anderen gleich ist, so sage ich dann mit Wahrheit, daß der vorgenommenen Zeichnung gemäß (ex constructione oder ex constr.) diese Linien wirklich einander gleich sind.

4) Eben so bediene ich mich öfters des Ausdruckes „ex definitione“, oder kürzer „ex def.“, wenn ich mich auf einen aufgestellten Begriff berufe.

I. Theil der Geometrie.

Die Longimetrie.

I. Hauptstück.

Erste Begriffe und Lehrsätze.

I. Abschnitt.

Von geradlinigten Winkeln und Figuren.

§. 7.

Geradlinigter Winkel überhaupt, und dann gerader Winkel.

a) Die Neigung zweier gerader Linien, die in einem Punkte zusammen stoßen, heißt ein geradlinigter Winkel, oder kürzer ein Winkel (Angulus); daher bilden (Fig. 6.) die beiden Linien AB und BC einen solchen Winkel;

b) Die beiden Linien AB und BC heißen die Schenkel (Crura); und

c) Der Punkt B, in welchem diese Linien zusammen treffen, heißt der Scheitel (Vertex).

d) Die Bezeichnung des Winkels geschieht entweder durch einen Buchstaben an dem Scheitel, oder durch einen zwischen die Schenkel gesetzten Buchstaben, oder auch durch die drei Buchstaben an den Schenkeln so, daß der Buchstabe von dem Scheitel in die Mitte zu stehen kömmt; daher bezeichnet man (Fig. 6.) den Winkel, welchen die Linien AB und BC bilden, mit B oder x, wie auch durch ABC oder CBA.

1. Zusatz: Die beiden Schenkel können zu einander jede beliebige Neigung, mithin auch eine solche

Lage haben, daß sie zusammen in eine gerade Linie fallen, und ein jeder in der Verlängerung des andern liegt; ein solcher Winkel heißt ein gerader Winkel (Angulus directus) wie (Fig. 7.) der Winkel ABC.

II. Zusatz: Die Größe des Winkels bleibt unverändert, wenn man die Schenkel desselben nach Belieben länger oder kürzer macht, weil dadurch die Neigung derselben zu einander nicht verändert wird.

III. Zusatz: Zwei zusammenstossende gerade Linien liegen allezeit in der nämlichen Ebene (§. 4. a.), weil ihre Lage durch drei Punkte bestimmt ist, durch die allemal eine Ebene gelegt werden kann; daher wird der geradlinigte Winkel auch ein ebener Winkel genannt.

IV. Zusatz: Gleiche geradlinigte Winkel decken einander, und sind deßhalb kongruent; denn legt man (Fig. 6. und 8.) die gleichen Winkel BAC und bac auf einander, daß die Scheitel b und B, und die Schenkel BC und bc auf einander fallen, so müssen auch die beiden anderen Schenkel BA und ba zusammen treffen; wäre dieses nicht, so wäre der erste Winkel kleiner oder größer als der zweite, nämlich Dbc wäre kleiner, und Ebc größer, als abc, was gegen die Voraussetzung ist.

Es sind also alle geradlinigten Winkel von gleicher Qualität, und zu ihrer Kongruenz wird nur mehr erfordert, daß sie gleich groß sind, somit die Schenkel die nämliche Neigung zu einander haben.

V. Zusatz: Im Scheitel B ist (Fig. 7.) durch den Schenkel AB von beliebiger Länge allemal seine Verlängerung BC, mithin der gerade Winkel gegeben, und alle geraden Winkel sind mit einander kongruent.

Anmerkung: 1) Wenn zwei gerade Linien einen Punkt gemein haben, so stossen oder kommen sie in diesem Punkte zusammen (concurrunt), und der Punkt heißt der Punkt des Zusammenstossens (Punctum concursus). Sind zwei zusammenstossende gerade Linien (Fig. 7.) nur Theile einer einzigen geraden Linie, so nennt man sie einander gerade oder direkt entgegengesetzt (indirectum ponuntur); sind aber zwei zusammen-

stossende gerade Linien (Fig. 6.) nicht Theile einer einzigen geraden Linie, so nennt man sie einander indirekt entgegengesetzt (in indirectum ponuntur).

2) Kann man zwei geradliniate Winkel so auf einander legen, daß die Scheitelpunkte und allemal die beiden Schenkel zusammen fallen, so sind sie kongruent; und decken einander, wenn man sie auch umgekehrt auf einander legt, oder über einander schlägt.

Will man nun die Kongruenz zweier geradliniater Winkel untersuchen, so legt man sie so auf einander, daß die Scheitel und zwei beliebige Schenkel zusammentreffen; fallen in dieser Lage auch die beiden anderen Schenkel zusammen, so sind die Winkel kongruent: im entgegengesetzten Falle aber sind die Winkel ungleich, und nicht kongruent.

3) Wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, so versteht man unter dem Worte Winkel ohne Beisatz allemal einen ebenen geradlinigten Winkel; indem jetzt von krummlinigten und vermischtlinigten Winkeln, das ist, von solchen Winkeln die Rede noch nicht ist, welche krumme Linien mit einander, oder gerade Linien mit krummen bilden.

4) Ein Winkel wird durch eine gerade Linie getheilt, wenn man sie vom Scheitel aus zwischen beiden Schenkeln des Winkels zieht; auf diese Weise ist (Fig. 9.) der gerade Winkel ABC durch die Linie BD in die Winkel ABD und DBC getheilt, welche deßhalb die beiden Theile des Winkels ABC sind.

5) Einige setzen den Buchstaben das Zeichen des Winkels (<) vor; ich werde mich anstatt dieses Zeichens des Wortes „Winkel" bedienen, und diesen auch öfters durch blosse drei Buchstaben bezeichnen.

§. 8.

Nebenwinkel, und ihre Eintheilung in schiefe und rechte Winkel.

a) Wenn zwei Winkel einen Schenkel gemein haben, und die beiden anderen Schenkel in einer geraden Linie liegen, so heißen sie Nebenwinkel (Anguli contigui, anguli deinceps positi), wie (Fig. 9.) die Winkel ABD und DBC.

b) Sind die beiden Nebenwinkel ungleich, so heißt jeder davon (Fig. 9.) schiefer Winkel (Angulus obliquus).

c) Sind sie gleich, so heißt jeder von ihnen (Fig. 10.) ein rechter Winkel (Angulus rectus), und wird mit dem Buchstaben R bezeichnet.

d) Weil bei gleichen Nebenwinkeln der gemeinschaftliche Schenkel auf beiden Seiten zu den zwei übrigen Schenkeln die nämliche Neigung hat, so sagt man, daß derselbe auf die gerade Linie, welche die übrigen Schenkel bilden, senkrecht, perpendikulär, lothrecht, oder wie sich auch einige ausdrücken, neutral oder gerade aufstehe, wie (Fig. 10.) der Schenkel BD auf der Linie AC, weßhalb die Linie BD ein Loth oder Perpendikel (Linea normalis, vel perpendiculum) genannt wird.

I. Zusatz: Zwei Nebenwinkel liegen allemal in der nämlichen Ebene; denn (Fig. 9 u. 10.) der Winkel ABD liegt in der nämlichen Ebene (§. 7. Zus. III.), und BC ist nach dem aufgestellten Begriffe von den Nebenwinkeln (ex def.) die Verlängerung von AB, und liegt also mit AB in der nämlichen Ebene (§. 4. Zus.), weßhalb die beiden Nebenwinkel ABD und DBC in der nämlichen Ebene sind.

II. Zusatz: Der gerade Winkel ABC (Fig. 9 und 10.) besteht aus den beiden Nebenwinkeln ABD und DBC, in die er durch den gemeinschaftlichen Schenkel BD getheilt wird; daher sind allemal zwei Nebenwinkel einem geraden Winkel gleich (Arithm. I. §. 10. Nro. 2.); das heißt, $ABD + DBC = ABC$, oder kürzer $x + y = ABC$, und $m + n = ABC$.

III. Zusatz: Zwei Nebenwinkel zusammen sind immer zwei rechten Winkeln gleich. Sind die beiden Nebenwinkel gleich (Fig. 10.), so ist jeder davon ein rechter Winkel (ex def.), somit sind sie zusammen zwei rechten gleich, das ist, $m + n = 2R$; sind sie aber ungleich (Fig. 9.), so ist nach dem II. Zusatze $x + y = ABC$, und $m + n = ABC$, also $x + y = m + n = 2R$.

IV. Zusatz: Der gerade Winkel ist allemal gleich zwei rechten, und alle rechten Winkel sind, wie die geraden Winkel (§. 7. Zus. V.), einander gleich, da jeder die Hälfte eines geraden Winkels ist.

••• ••• •••

V. Zusatz: Alle Winkel, die in einer Ebene von einem gemeinschaftlichen Scheitel aus auf einer Seite einer geraden Linie möglich sind, sind zusammen so groß, wie zwei rechte Winkel; daher (Fig. 11.) ist $m + n + o = 2R$, weil diese Winkel zusammen den geraden Winkel ABC geben, und dieser zwei rechten gleich ist (Zus. IV.).

VI. Zusatz: Alle Winkel, die rings um einen Punkt in einer Ebene möglich sind, halten zusammen vier rechte Winkel; deßhalb (Fig. 11.) ist $m + n + o + p + q + r = 4R$;

Denn nach dem vorigen Zusatze ist

$m + n + o = 2R$,

und $p + q + r = 2R$, also (Arithm. I. §. 25. I.)

$m + n + o + p + q + r = 4R$.

VII. Zusatz: In dem geraden Winkel ist ein Schenkel gegen die beiden Seiten des anderen gleich geneigt; denn (Fig. 12.) nach der oberen Seite von AB ist die Neigung des Schenkels BC gleich CBE + EBA, und nach der unteren Seite = CBF + FBA, und beide Summen sind einander gleich.

VIII. Zusatz: Wenn zwei Winkel einen Schenkel gemein haben, und zusammen zwei rechten gleich sind, so sind sie Nebenwinkel, das ist, dann liegen ihre beiden übrigen Schenkel in einer geraden Linie.

Wären (Fig. 12.) in dieser Voraussetzung die beiden Winkel ABD und DBC keine Nebenwinkel, so müßte die Verlängerung von AB gegen BC hin ober dem Schenkel BC liegen, wie BE, oder unter demselben, wie BF.

Im ersten Falle wären ABD und DBE Nebenwinkel (ex def.), also

$ABD + DBE = 2R$,

und ex hyp. ist $ABD + DBC = 2R$, also (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.)

$ABD + DBE = ABD + DBC$,

und (Arithm. I. §. 34. I.) somit $DBE = DBC$.

Im zweiten Falle wären ABD und DBF Nebenwinkel, daher

$$ABD + DBF = 2R,$$
und ex hyp. ist $ABD + DBC = 2R$,

$$\text{also } ABD + DBF = ABD + DBC,$$
$$\text{und } DBF = DBC.$$

Beides ist aber unmöglich, weil die gleichen Winkel sich decken müssen (§. 7. Zus. IV.), und die Winkel DBE und DBC, dann DBF und DBC einander nicht gleich sind, ausser, es fallen die Verlängerungen BE und BF auf die Linie BC; es ist also BC die Verlängerung AB, und die Winkel ABD und DBC sind Nebenwinkel, wenn sie den Schenkel BD gemein haben, und zusammen zwei rechten Winkeln gleich sind.

§. 9.

Eintheilung der Winkel in hohle und erhabene, dann in spitzige und stumpfe Winkel.

a) Ein Winkel, der größer ist als ein gerader, oder größer, als zwei rechte Winkel zusammen, heißt ein erhabener Winkel (Angulus convexus).

b) Ein Winkel, der kleiner ist, als ein gerader, oder kleiner, als zwei rechte zusammen, heißt ein hohler Winkel (Angulus concavus); so ist (Fig. 6.) der Winkel x ein hohler, hingegen ABC auf der anderen Seite ein erhabener Winkel.

c) Ein hohler Winkel, der kleiner ist als ein rechter, heißt spitzig (Angulus acutus), und ein hohler Winkel, der größer ist, als ein rechter, heißt stumpf (Angulus obtusus); daher ist (Fig. 9.) der Winkel DBC spitzig, und ABD ist stumpf.

1. Zusatz: Eine gerade Linie, die mit einer anderen in einem Punkte zusammen stoßt, und mit ihr nicht in eine gerade Linie fällt, also ihr indirekt entgegengesetzt ist (§. 7. Anmerk. 1.), bildet mit ihr auf einer Seite einen hohlen, und auf der anderen einen erhabenen Winkel; auf diese Weise stossen (Fig. 12.) die Linien AB und BE im Punkte B zusammen, und bilden auf einer Seite den hohlen Winkel $ABE = ABD + DBE$, und auf der anderen den erhabenen Winkel $ABE = ABF + FBE$, und durch beide Winkel, sowohl

durch den hohlen als den erhabenen, ist die Lage der beiden geraden Linien AB und BE bestimmt.

II. Zusatz: Von zwei Nebenwinkeln ist jeder ein hohler Winkel; denn (Fig. 9.) es ist $x + y = 2R$, ferner $x < x + y$, und $y < y + x$, also $x < 2R$, und $y < 2R$.

III. Zusatz: Wenn von zwei Nebenwinkeln einer ein rechter Winkel ist, so ist der andere auch ein rechter Winkel; das ist, wenn (Fig. 10.) der Winkel $m = R$, so ist auch $n = R$, weil beide Nebenwinkel $m + n$ zwei rechten gleich sind (§. 8. Zus. III.).

IV. Zusatz: Wenn ein hohler Winkel ein rechter Winkel ist, so steht jeder Schenkel auf dem anderen senkrecht oder perpendikulär. Verlängert man (Fig. 10.) den Schenkel AB gegen B, so ist der Winkel n, den die Verlängerung BC mit BD bildet, auch ein rechter Winkel (Zus. III.), da m und n Nebenwinkel sind (§. 8. a.); mithin steht die Linie DB auf AC, also auch auf AB senkrecht.

V. Zusatz: Ist einer von zwei Nebenwinkeln stumpf, so ist der andere spitzig, und umgekehrt; das heißt (Fig. 9.), der Winkel y ist $< R$, wenn $x > R$, und $x > R$, wenn $y < R$, weil beide Winkel x und y zwei rechten gleich sind (§. 8. Zus. III.).

VI. Zusatz: Von zwei schiefen Nebenwinkeln ist der größere stumpf und der kleinere spitzig. Wäre (Fig. 9.) der größere Winkel x kein stumpfer Winkel, so wäre er, da beide Nebenwinkel hohl sind (Zus. II.) ein rechter Winkel, oder ein spitziger; ist er ein rechter, so ist y auch ein rechter (Zus. III.), und diese beiden Winkel sind keine schiefen Winkel (§. 8. b.); ist hingegen x ein spitziger Winkel, also $x < R$, so ist der kleinere Winkel y auch $< R$, und $x + y < 2R$, was nicht möglich ist (§. 8. Zus. III.), also muß der größere Winkel x stumpf sein.

Ist aber einer von zwei Nebenwinkeln stumpf, so muß der andere spitzig sein (Zus. V.), somit ist der kleinere Nebenwinkel spitzig.

Anmerkung: Wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil be-

merkt wird, so versteht man unter dem Worte Winkel allemal einen hohlen Winkel.

§. 10.

Scheitelwinkel.

Wenn zwei Winkel einen Scheitel gemein haben, und die Schenkel des einen Winkels die verlängerten Schenkel des anderen sind, so nennt man sie Scheitelwinkel oder Vertikalwinkel (Anguli verticales); wie (Fig. 13.) die Winkel ABD und EBC, dann ABE und DBE oder kürzer m und n, wie auch o und p, weil sie den Scheitel B gemein haben, und AB mit BC, dann DB mit BE in einer geraden Linie liegt.

I. Zusatz: Bei den Scheitelwinkeln sind die Schenkel des einen Winkels den Schenkeln des anderen direkt oder gerade entgegengesetzt (§. 7. Anm. 1.), und beide liegen in der nämlichen Ebene (§. 4. Zus.).

II. Zusatz: Wenn sich zwei gerade Linien schneiden, was nur in einem einzigen Punkte geschehen kann (§. 3. Zus. IV.), so erhält man Scheitelwinkel, welche den Durchschnittspunkt zum gemeinschaftlichen Scheitel haben. Dieselben bekömmt man auch, wenn zwei gerade Linien in einem Punkte zusammen stossen, und gegen diesen Punkt hin verlängert werden.

III. Zusatz: Zwei Scheitelwinkel sind einander gleich; denn (Fig. 13.) die Winkel m und o, dann o und n sind Nebenwinkel (§. 8. a.), daher (§. 8. Zus. III.)

$$m + o = 2R,$$
und $$o + n = 2R,$$
also $$m + o = o + n,$$ und $m = n$.

Eben so $$m + o = 2R,$$
und $$m + p = 2R,$$
also $$m + o = m + p,$$ und $o = p$.

Das heißt, die Scheitelwinkel m und n, wie auch o und p sind einander gleich.

IV. Zusatz: Wenn eine gerade Linie auf einer andern perpendikulär steht, so ist auch ihre Verlängerung

rung darauf senkrecht; das ist (Fig. 14.), wenn DB auf AC senkrecht steht, so ist BE auf AC perpendikulär, weil sich die Linien AC und DE im Punkte B schneiden, und die Scheitelwinkel m und n, dann o und p einander gleich sind (Zus. III.) und somit auch die zwei untern Winkel p und n rechte Winkel sind (§. 8. c. und d.).

§. 11.

Eintheilung des rechten Winkels in Grade, Minuten und Sekunden.

a) Der 90ste Theil eines rechten Winkels heißt ein Grad;

b) Der 60ste Theil eines Grades eine Minute; und

c) Der 60ste Theil einer Minute eine Sekunde.

d) Man bezeichnet Grade, Minuten und Sekunden dadurch, daß man rechts oben an die Zahlen die Zeichen (°, ′, ″) hinschreibt; so heißt z. B. 46°, 18′, 36″ eben so viel, als 46 Grad, 18 Minuten, 36 Sekunden (Arithm. I. §. 86 Nro. 6.).

I. Zusatz: Es hat also ein rechter Winkel 90 Grad; ein Grad hat ferner 60 Minuten, und eine Minute 60 Sekunden (Arithm. I. §. 10. Nro. 2.).

II. Zusatz: Der gerade Winkel (§. 8. Zus. IV.) hält 180°, ein erhabener Winkel (§. 9. a.) ist größer, und ein hohler (§. 9. b.) kleiner als 180°; ferner ein stumpfer Winkel ist größer, und ein spitziger (§. 9. c.) ist kleiner, als 90 Grad.

III. Zusatz: Zwei Nebenwinkel (§. 8. Zus. III.) halten zusammen 180°; man findet somit den einen, wenn man den andern von 180° subtrahirt.

IV. Zusatz: Alle Winkel um einen Punkt auf einer Seite einer geraden Linie (§. 8. Zus. V.) halten zusammen 180°, und alle Winkel rings um einen Punkt (§. 8. Zus. VI.) in einer Ebene halten zusammen 360°.

V. Zusatz: Ein hohler Winkel ist mit seinem erhabenen Winkel (§. 9. Zus. I.) vier rechten gleich;

und hält daher mit ihm 360°; man bekömmt also den einen dieser beiden Winkel, wenn man den andern von 360° abzieht.

Anmerkung: 1) Nach der neuen französischen Eintheilung wird der rechte Winkel in 100 Grad, ein Grad in 100 Minuten, und eine Minute in 100 Sekunden getheilt.

2) Einige Mathematiker theilen die Sekunde in 60 Terzen, andere dagegen in 10 Zehntel; die letztere Eintheilung findet man öfter als die erstere, im Falle man die Größe des rechten Winkels in kleineren Theilen, als in Sekunden ausdrücken will.

3) Warum man den rechten Winkel auf diese Weise eintheilet, wird man in der Folge sehen, wenn von dem Maaße der Winkel die Rede ist.

§. 12.

Figur, dann ebene und krumme, wie auch geradlinigte, krummlinigte und vermischtlinigte Figur.

a) Eine Fläche, die nach allen Seiten hin völlig begränzt ist, heißt eine Figur.

b) Ist die begränzte Fläche eben, so hat man eine ebene Figur;

c) Ist aber die Fläche krumm, so hat man eine krumme Figur;

d) Die ganze Gränze der Figur heißt ihr Umfang, Umriß oder Perimeter. Besteht dieser aus einer einzigen krummen Linie, so heißt er ihre Peripherie.

e) Besteht der Umfang der Figur aus mehreren Linien, so heissen die einzelnen Linien die Seiten (Latera), und die Winkel dieser Seiten die Ecke der Figur.

f) Eine Linie von einem Ecke zum andern, ohne daß sie mit einer Seite der Figur zusammenfällt, heißt eine Diagonallinie oder Diagonal.

Daher sind (Fig. 15.) die Linien AB, BC, CD, DE und EA, welche den Umfang oder Perimeter der Figur bilden, die Seiten; die Winkel A, B, C, D und E die Ecke, und die Linien AC und AD die Diagonalen dieser Figur.

g) Figuren heissen geradlinigt, wenn alle ihre Seiten gerade Linien sind, dann krummlinigt, wenn ihr Umfang aus einer oder mehreren krummen Linien besteht, und gemischtlinigt, wenn ihr Perimeter aus geraden und krummen Linien zugleich besteht.

I. Zusatz: Zwei gerade Linien geben keine Figur, weil sie sich nur in einem Punkte schneiden können, und also die eine Fläche nie nach allen Seiten hin begränzen; daher gibt es keine geradlinigte Figur mit zwei Seiten, und eine solche muß wenigstens drei Seiten haben.

II. Zusatz: Eine geradlinigte Figur hat so viele Ecke oder Winkel, als sie Seiten hat. Es bildet (Fig. 15.) die erste Seite AB mit der zweiten Seite BC das erste Eck B, die zweite mit der dritten Seite das zweite Eck C, die dritte mit der vierten Seite das dritte Eck, und so fortgesetzt, und am Ende die letzte Seite mit der ersten das letzte, das ist, die nte Seite mit der ersten das nte Eck.

III. Zusatz: Liegt von einer geraden Linie ein Theil innerhalb, und ein Theil außerhalb einer ebenen Figur, so schneidet dieselbe wenigstens in einem Punkte den Umfang der Figur, weil alle Theile der geraden Linie, welche eine stätige Größe ist (Arithm. I. §. 2. g.), zusammen hängen, und deßhalb eine solche gerade Linie nothwendig durch den Umfang der Figur oder ihre Gränze gehen muß.

IV. Zusatz: Eine gerade Linie, die innerhalb einer ebenen Figur liegt, schneidet, an ihren beiden Endspunkten verlängert, ihren Umfang wenigstens in zwei Punkten, und, wenn die Figur geradlinigt ist, wenigstens zwei von ihren Seiten. Denn eine gerade Linie läßt sich nach beiden Seiten hin ohne Ende verlängern (§. 3. Zus. I.), und es liegt nach jeder Seite hin ein Punkt von ihrer Verlängerung außerhalb der Figur; daher muß eine solche gerade Linie den Umfang der Figur wenigstens in zwei Punkten, und wenn diese geradlinigt ist, wenigstens zwei von ihren Seiten schneiden.

§. 13.

Dreieck, Viereck und Vieleck, wie auch reguläre und irreguläre, dann gleichnamige und ungleichnamige Figuren.

a) Rücksichtlich der Anzahl der Seiten oder Ecke wird eine ebene geradlinigte Figur ein **Dreieck** oder **Triangel** (Triangulum seu trigonum), ein **Viereck** (Tetragonum vel quadrilaterum) oder überhaupt ein **Viereck** (Polygonum) genannt, je nachdem die Figur zu ihrer Gränze drei Seiten, oder vier, oder überhaupt mehr als vier Seiten hat, und also in ihr drei, vier oder mehr als vier Ecke vorkommen.

b) In Absicht auf die Verhältnisse der Seiten und Winkel ist die geradlinigte Figur **regulär**, wenn in ihr alle Seiten einander, und zugleich alle Winkel unter sich gleich sind, und **irregulär** ist dieselbe, wenn in ihr entweder die Seiten, oder die Winkel, oder beide Stücke, Seiten und Winkel, ungleich sind.

c) Zwei oder mehrere geradlinigte Figuren heissen **gleichnamig**, wenn sie gleichviel Seiten haben; daher sind alle Dreiecke unter sich, eben so alle Vierecke, und eben so alle Vielecke von n Seiten gleichnamige Figuren.

Zählt man bei gleichnamigen Figuren von einer Seite an die übrigen in beiden nach einerlei Ordnung, so heissen jede zwei gleichvielsten Seiten in ihnen die **gleichnamigen** oder **homologen Seiten** (Latera homologa), und jede zwei Winkel, die von gleichnamigen Seiten eingeschlossen werden, heissen alsdann die **gleichnamigen** oder **homologen Winkel** (Anguli homologi); wenn man also (Fig. 56.) bei den Seiten AB und ab anfängt zu zählen, so sind AB und ab, dann BC und bc, ferner CD und cd ꝛc. die gleichnamigen Seiten, und die Winkel A und a, dann B und b, ferner C und c ꝛc. die gleichnamigen Winkel.

Zählt man hingegen von einem Winkel zu den übrigen in einerlei Ordnung, so heissen jede zwei

gleichvielsten Winkel, und die Seiten, welche gleichnamige Winkel einschließen, gleichnamige Seiten.

II. Abschnitt.

Vom Kreise.

§. 14.

Kreis, dann Zentrum, Halbmesser, Sehne und Durchmesser des Kreises.

a) Eine krumme Linie, welche eine Ebene nach allen Seiten hin so begränzt, daß alle gerade Linien aus ihr nach einem gewissen Punkte dieser Ebene einander gleich sind, heißt eine Kreislinie oder die Peripherie des Kreises (circumferentia).

b) Die durch eine solche Begränzung erhaltene Figur nennt man Kreis oder Zirkel (Circulus), und die begränzte Ebene wird die Kreisebene oder Kreisfläche (Area circuli) genannt.

c) Der Punkt, von welchem alle Punkte der Peripherie gleichweit entfernt sind, ist der Mittelpunkt des Kreises (Centrum circuli).

d) Jede gerade Linie, welche vom Mittelpunkte bis zur Peripherie gezogen wird, heißt Halbmesser oder Radius (Radius).

e) Eine gerade Linie von einem Punkte der Peripherie bis zu einem andern Punkte derselben heißt Sehne oder Chorde (Chorda).

f) Geht die Sehne durch den Mittelpunkt des Kreises, so heißt sie Durchmesser (Diameter).

g) Jeder Theil der Kreislinie heißt ein Bogen derselben, oder ein Kreis- oder Zirkel-Bogen (Arcus), und jede gerade Linie, welche die Endpunkte eines solchen Bogens verbindet, die Sehne desselben.

h) Wenn in einer Ebene zwei Kreise verschiedene

Mittelpunkte haben, so heißt die gerade Linie, welche die Mittelpunkte dieser Kreise verbindet, ihre Zentrallinie.

Daher ist (Fig. 16.) die krumme Linie AHGBQA die Kreislinie oder die Peripherie des Kreises, die von ihr eingeschlossene Ebene die Kreisebene, der Punkt C das Zentrum, die Linie AC oder CB ein Halbmesser oder Radius, die Linie FG eine Sehne, die Linie AB ein Durchmesser oder Diameter, der Theil der Kreislinie FHG ein Bogen dieses Kreises, und (Fig. 18.) die Linie BE die Zentrallinie der Kreise um B und E.

I. Zusatz: Eine gerade Linie, von welcher ein Punkt innerhalb, und ein Punkt außerhalb der Kreislinie liegt, schneidet die Peripherie des Kreises wenigstens in einem Punkte (§. 12. Zus. III.).

II. Zusatz: Jeder Radius hat mit der Kreislinie nur einen Punkt gemein. Denn hätte (Fig. 16.) der Radius CB mit der Peripherie noch einen zweiten Punkt gemein, so müßte dieser entweder im Radius CB, wie z. B. der Punkt J, oder in seiner Verlängerung z. B. in P liegen, und es wäre nach dem von der Kreislinie aufgestellten Begriffe (§. 14. a.) im ersten Falle die Linie CJ = CB, dann im zweiten die Linie CP = CB, und beides ist unmöglich (Arithm. I. §. 10. Nro. 3.).

III. Zusatz: Jeder Durchmesser besteht aus zwei Radien, und hat mit der Kreislinie nur zwei Punkte gemein; weil er eine Sehne ist, welche durch das Zentrum des Kreises geht, und dieses innerhalb der Kreislinie liegt, und überdieß jeder Radius mit der Peripherie nur einen Punkt gemein hat (Zus. III.)

IV. Zusatz: Alle Radien eines Kreises sind einander gleich, und eben so alle Durchmesser eines Kreises, da jeder Durchmesser aus zwei Radien besteht (Zus. III.); deßwegen ist das Zentrum von allen Punkten der Kreislinie gleich weit entfernt.

V. Zusatz: Jede Sehne theilet den Kreis in

zwei Theile, die auf verschiedenen Seiten der Sehne liegen.

VI. Zusatz: Ein Durchmesser des Kreises theilet die Kreislinie und die Kreisebene in zwei kongruente Theile.

Man lege (Fig. 16.) den untern Bogen AQB auf den obern Bogen AHB, so haben sie mit einander den nämlichen Anfangspunkt A, und den nämlichen Endspunkt B, und alle dazwischen liegenden Punkte des untern Bogens fallen auf Punkte des obern, weil sie sonst dem Mittelpunkte C näher, oder weiter davon entfernt sein müßten, als um den Halbmesser CD; daher decken sich diese beiden Bögen und sind kongruent, gleichwie es die beiden Theile der Kreisebene sind, nämlich AHB und AnB, weil ihre Gränzen genau zusammen fallen, und sie sich daher vollkommen decken.

VII. Zusatz: Der Durchmesser ist die größte Sehne. Denn (Fig. 61.) man nehme die Sehne AB an, welche kein Durchmesser ist, so liegt das Zentrum C nicht in ihr, und AB ist kleiner als AC + CB (§. 3. Zus. II.); der Durchmesser ist aber so groß, wie zwei Radien zusammen (Zus. IV.), daher ist der Durchmesser die größte Sehne.

Anmerkung: 1) Mit einem Instrumente, das ein Zirkel (Circinus) genannt wird, kann man immer in einer Ebene mit einem beliebigen Halbmesser um einen angenommenen Punkt eine Kreislinie beschreiben, indem man den einen Fuß des Zirkels in diesem Punkte, der das Zentrum wird, festsetzt, und den andern bei der nämlichen Oeffnung, welche dem angenommenen oder bestimmten Halbmesser gleich ist, rings herum dreht, bis er wieder auf den ersten Punkt zurückkömmt; deßwegen wird auch die Kreislinie von den griechischen Wörtern περι — herum, und φερω — tragen die Peripherie des Kreises genannt.

2) Die zwei gleichen Theile, in welche der Durchmesser die Kreislinie theilet, nennt man Semiperipherie.

§. 15.

I. Lehrsatz:

In einer Ebene ist durch das Zentrum und den Halbmesser die Kreislinie gegeben.

Beweis:

1) Wäre (Fig. 16.) um das Zentrum C beim gegebenen Halbmesser AC in der Ebene, in welcher die Kreislinie AHBQA liegt, noch eine zweite Kreislinie möglich, so müßte von ihr wenigstens ein Punkt nicht in jener Kreislinie liegen, weil man sonst nicht zwei verschiedene Kreislinien hätte;

2) Dieser Punkt liegt entweder innerhalb des ersten Kreises, wie J, oder außerhalb wie P; beides aber ist unmöglich, weil die Linie CJ verlängert in B durch die Kreislinie geht, wie die Linie CP; ferner $CJ < CB$, dann $CP > CB$, somit, da $CA = CB$, die Linie $CJ < CA$, und $CP > CA$, und deßhalb die Linien CJ und CP nicht mehr dem gegebenen Radius AC gleich wären;

3) Also ist in einer Ebene um das Zentrum C durch den Radius AC die Kreislinie gegeben, das ist, es gibt in dieser Ebene außer der Kreislinie AHBQA keine andere Kreislinie mehr, welche dieses Zentrum und diesen Halbmesser hätte (§. 6.).

I. Zusatz: Alle Kreislinien, welche gleiche Radien haben, sind kongruent, weil die Zentra als Punkte einerlei (§. 2. Zus. V.), und gleiche Radien als gleich lange Linien (§. 3. Zus. V.) kongruent sind, und durch das Zentrum und den Radius die Kreislinie gegeben ist (§. 6. Anmerk. 1.).

II. Zusatz: Eben so sind alle Kreislinien, die gleiche Durchmesser haben, kongruent, weil die Radien die Hälften der Durchmesser sind (§. 14. Zus. III.), und dieselben durch die Radien bestimmt sind.

III. Zusatz: Durch den Radius oder den Durchmesser ist die Kreisfläche oder der Kreis selbst gegeben,

da durch jeden die Kreislinie als die Gränze der Kreisebene gegeben ist (Zus. I. und II.), und deßhalb alle Kreise von gleichen Radien, oder von gleichen Durchmessern kongruent sind (§. 6.).

IV. Zusatz: Ein größerer Halbmesser gibt einen größeren Kreis, das ist, wenn (Fig. 17.) der Radius QC größer ist als (Fig. 16.) der Radius AC der beiderseits um C mit diesen Halbmessern beschriebenen Kreise, so sind, wenn man CS = AC macht und mit CS um C bei Fig. 17. einen Kreis beschreibt, die Kreise AHBQA und SXYZS kongruent (Zus. III.); nun ist QC > SC, folglich liegt der Kreis SXYZS ganz innerhalb QRTUQ, mithin ist die Kreisfläche QRTRQ > SXYZS, also auch QRTUQ > AHBQA, das heißt, der mit dem größeren Radius QC beschriebene Kreis ist größer, als der des kleineren Radius AC.

V. Zusatz: Gleiche Kreise haben gleiche Radien. Denn wäre der eine Radius größer als der andere, so wäre auch der eine Kreis größer als der andere (Zus. IV.); aus diesem Grunde sind auch alle gleiche Kreise kongruent (Zus. III.).

VI. Zusatz: Ein größerer Kreis hat auch einen größeren Halbmesser. Denn wären die Halbmesser gleich, so wären es auch die Kreise, und wäre der Halbmesser des größeren Kreises kleiner, so müßte der größere Kreis zugleich der kleinere sein, da doch beides gegen die Voraussetzung ist.

Anmerkung: 1) Was in den drei letzten Zusätzen dieses §. von Radien gesagt wurde, gilt auch von den Durchmessern, weil jeder Radius die Hälfte des Durchmessers des nämlichen Kreises ist.

2) Will man von einem Punkte der Kreislinie einen Durchmesser ziehen, so zieht man vom gegebenen Punkte zum Zentrum eine gerade Linie, und verlängert sie auf der anderen Seite, bis sie die Kreislinie erreicht; die dadurch erhaltene Linie ist der verlangte Durchmesser.

§. 16.

Aufgabe, um einen Mittelpunkt in einer Ebene einen Kreis zu beschreiben, der eine unbegränzte gerade Linie in zwei Punkten schneidet.

Auflösung:

Soll die Kreislinie (Fig. 16.) um den Mittelpunkt C die gerade Linie ED von unbestimmter Größe in zwei Punkten schneiden, so nehme man in ED den beliebigen Punkt J an, ziehe die gerade Linie CJ, und beschreibe mit einer Oeffnung des Zirkels, die größer ist als CJ, eine Kreislinie, sie wird die unbestimmte gerade Linie DE in zwei Punkten schneiden.

Beweis:

1) Man verlängere die Linie CJ beiderseits bis zur Peripherie, so ist AB ein Durchmesser (§. 14. f.), und theile die Kreislinie in zwei gleiche Theile (§. 14. Zus. VII.), nämlich in die gleichen Kreisbögen AHB und AmB;

2) Von den beiden Endspunkten A und B des Diameters AB, die zugleich Punkte der Peripherie des Kreises sind, liegt der Punkt A diesseits, und der andere jenseits der geraden Linie DE;

3) Nun kann im Halbkreise AHB die Kreislinie von A nicht ununterbrochen nach H und B gehen, ohne die gerade Linie DE oder dem Durchmesser AB in einem Punkte m zu schneiden; eben so muß im anderen Halbkreise AQB die Kreislinie von B nach n und A die dazwischen liegende Linie in einem Punkte n unter dem Diameter AB schneiden;

4) Daher hat man jetzt um C eine Kreislinie verzeichnet, welche die unbestimmte gerade Linie DE in den zwei Punkten m und n schneidet.

I. Zusatz: Eine gerade Linie, die einen Punkt innerhalb des Kreises hat, schneidet verlängert die Peripherie des Kreises in zwei Punkten.

Ist nämlich (Fig. 16.) der Punkt, welcher innerhalb des Kreises liegt, im Mittelpunkte C, so ist die

Linie verlängert ein Diameter (§. 14. f.), der offenbar die Kreislinie in zwei Punkten schneidet. Liegt aber der Punkt im Kreise außer dem Zentrum, wie es beim Punkte J der Linie DE der Fall ist, so ziehe man durch J den Durchmesser AB; nun liegt der eine Theil der Linie DE im Halbkreise AHB, und der andere im Halbkreise AQB, und weil jeder dieser Theile bis außer dem Kreise verlängert werden kann, schneidet die gerade Linie DE die Peripherie in den beiden Punkten m und n.

II. Zusatz: Die Kreislinie hat nur ein Zentrum, das ist, es gibt in der Kreisebene nur einen Punkt, von dem alle Punkte der Peripherie gleich weit entfernt sind. Denn (Fig. 16.) gäbe es außer C noch ein anderes Zentrum, so müßte es in der Kreisebene liegen (§. 14. a.); nimmt man nun an, daß auch der Punkt J ein Zentrum des Kreises ist, so muß die gerade Linie CJ verlängert die Peripherie in zwei Punkten schneiden (Zus. I.), was aber nicht möglich ist, da $BJ < BC$, dann $BC = CA$, also $BJ < CA$, und $CA < AJ$ ist, somit BJ kleiner als AJ wäre, weßhalb J kein Zentrum mehr dieses Kreises sein kann.

III. Zusatz: Wenn (Fig. 18.) ein Kreis um A einen Punkt D seiner Peripherie innerhalb, und einen Punkt A außerhalb des Kreises um E hat, so haben die beiden Kreislinien zwei Punkte m und n gemein, die auf verschiedenen Seiten der Sehne AD liegen. Denn verbindet man die beiden Punkte A und D durch eine gerade Linie, so erhält man die Sehne AD, welche die Kreislinie um B in zwei Theile schneidet, die auf verschiedenen Seiten derselben liegen (§. 14. Zus. V.); nun kann die Kreislinie um B vom Punkte D innerhalb des Kreises um E zum Punkte A außer diesem Kreise nicht stätig kommen, ohne auf jeder Seite der Sehne AD die Kreislinie um E in einem Punkte zu durchschneiden, das ist, beide Kreislinien haben auf einer Seite von AD den Punkt m und auf der andern den Punkt n gemein.

§. 17.

II. Lehrsatz:

Wenn von zwei Kreisen in einer Ebene ihre Radien und die Zentrallinien eine solche Länge haben, daß zwei von diesen Linien zusammen allemal größer sind, als die dritte einzeln, so haben die beiden Kreislinien zwei Punkte gemein, die auf verschiedenen Seiten der Zentrallinie liegen.

Beweis:

1) Man verlängere [Fig. 18.] die Zentrallinie BE [§. 14. h.] auf beiden Seiten bis an die Peripherien der Kreise, mithin bis A und F, so fallen die beiden Diameter AD und CF in eine gerade Linie mit der Zentrallinie [§. 3. Zus. II.], und der Mittelpunkt des zweiten Kreises E kömmt zwischen B und F zu liegen;

2) Nach der Voraussetzung ist
 a) die Summe $EB + BA > EC$,
 b) dann $BE + EF > BD$,
 c) und $BD + CE > BE$;

3) Nach der ersten Voraussetzung bei Nro. 2. a. ist $EB + BA > EC$, oder da $EB + BA = EA$, es ist $EA > EC$, also liegt A als der Anfangspunkt des Durchmessers AD vom ersten Kreise außer dem zweiten Keise um E;

4) Nach der zweiten Voraussetzung bei Nro. 2. b. ist $BE + EF > BD$, oder da $BE + EF = BF$, es ist $BF > BD$, also liegt der Punkt D als der Endspunkt des Durchmessers AD zwischen B und F;

5) Deßhalb kann der Punkt D mit E zusammen fallen, oder zwischen E und F liegen, oder auch zwischen B und E sein; fällt er mit E zusammen, oder fällt er zwischen E und F, so liegt er in beiden Fällen innerhalb des Kreises um E;

6) Liegt aber der Punkt D zwischen B und E, so kann er mit C zusammen fallen, oder zwischen C und B liegen, oder endlich zwischen C und E sein; die

beiden ersten Lagen sind aber wegen der gesetzten Bedingungen nicht möglich, weil gegen die Bedingung bei Nro. 2. c. in der ersten Lage BD + CE = BE, und in der zweiten Lage BD + CE < BE wäre;

7) Also liegt auch der Punkt D im dritten Falle [Nro. 5.] innerhalb des Kreises um E;

8) Liegt aber ein Punkt A von der Peripherie des ersten Kreises um B außerhalb, und ein anderer Punkt D von der Peripherie dieses Kreises innerhalb des Kreises um E, was bei Nro. 3. und dann von Nro. 4 — 7. gezeigt wurde, so schneiden sich die Kreislinien in zwei Punkten, die auf verschiedenen Seiten der Sehne AD liegen [§. 16. Zus. III.], somit auch auf verschiedenen Seiten der Zentrallinie BE sind [Nro. 1.].

Es schneiden sich also die beiden Kreise um B und E in den zwei Punkten m und n, welche auf verschiedenen Seiten der Zentrallinie BE liegen, wenn diese und die beiden Radien AB und EF, oder BD und CE eine solche Länge haben, daß allemal zwei von diesen Linien zusammen größer sind, als die dritte einzeln, das ist, wenn die Kreise um B und E in einer Ebene eine solche Größe und Lage haben, daß EB + BA > EC, dann BE + EF > BD, und BD + CE > BE.

I. Zusatz: Wenn die Radien der Kreise, die in einer Ebene liegen, und ihre Zentrallinie einander gleich sind, so schneiden sich die Kreislinien in zwei Punkten, wovon der eine ober und der andere unter der Zentrallinie liegt.

Denn [Fig. 18.] wenn AB = CE = BE, so sind zwei von diesen Linien zusammen allemal größer als die dritte, d. h., dann ist AB + CE > BE, ferner AB + BE > CE, und BE + CE > AB, somit schneiden sich kraft des aufgestellten Lehrsatzes die beiden Kreislinien auf die angezeigte Weise.

II. Zusatz: Eben so schneiden sich die Kreislinien, wenn die Radien der Kreise einander gleich sind, und jeder davon größer ist, als die halbe Zentrallinie.

Denn [Fig. 18.] wenn AB = CE, und AB > ½ BE somit auch CE > ½ BE, so ist

$$
\begin{array}{ll}
 & a)\ AB > \tfrac{1}{2} BE, \\
\text{dann} & \quad CE > \tfrac{1}{2} BE, \\
\hline
\text{also} & AB + CE > BE;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{ferner} & b)\ AB = CE, \\
\text{dann} & \quad BE > 0, \text{ nach §. 14. h.} \\
\hline
\text{also} & AB + BE > CE, \text{ vermöge Arithm. I. §. 25. II.};
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{endlich} & c)\ CE = AB, \\
\text{dann} & \quad BE > 0, \\
\hline
\text{mithin} & CE + BE > AB.
\end{array}
$$

Es haben also in dieser Voraussetzung die Radien und die Zentrallinie der Kreise wieder eine solche Größe, daß zwei von diesen Linien allemal größer sind, als die dritte, weßhalb sich die Kreislinien nach dem aufgestellten Lehrsatze auf die angezeigte Weise schneiden müssen.

II. Hauptstück.

Von der Lage und Größe gerader Linien.

I. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Dreiecken.

§. 18.

Eintheilung der Dreiecke, in ungleichseitige, gleichschenklichte und gleichseitige Dreiecke.

Nach dem Verhältnisse der Größe der Seiten zu einander heißt ein Dreieck [§. 13. a.]

a) Ein ungleichseitiges Dreieck [Triangulum scalenum], wenn keine der drei Seiten einer anderen gleich ist, somit alle drei Seiten unter sich ungleich sind, wie [Fig. 19.] das Dreieck ABC; dann

b) Ein gleichschenklichtes Dreieck [Triangulum aequicrurum vel isoscelicum, aut isosceles], wenn nur zwei Seiten, die immer Schenkel des nämlichen Winkels sind, einander gleich sind, wie [Fig. 20.] das Dreieck ABC; und endlich

c) Ein gleichseitiges Dreieck [Triangulum aequilaterum], wenn alle drei Seiten einander gleich sind, wie [Fig. 21] das Dreieck ABC.

d) Nimmt man eine Seite als die Basis oder Grundlinie an, so nennt man das gegenüberstehende Eck die Spitze des Dreieckes; es ist daher [Fig. 21.] im Dreiecke ABC die Seite AC die Grundlinie, so wie B die Spitze des Dreieckes, und umgekehrt, wenn B die Spitze, so ist AC die Grundlinie des Dreieckes.

e) Im gleichschenklichten Dreiecke nimmt man gewöhnlich dasjenige Eck als Spitze an, das die glei-

chen Seiten bilden, wo dann die opponirte Seite die Basis oder Grundlinie ist.

f) Eine gerade Linie, welche von der Spitze des Dreieckes auf die Grundlinie perpendikulär steht [§. 8. d.], heißt die Höhe des Dreieckes; daher ist [Fig. 37.] im Dreiecke ABC das Perpendikel B, welches von der Spitze B auf AC gezogen ist, die Höhe des Dreieckes.

I. Zusatz: Die drei Ecke eines Dreieckes, das ist, die drei Schenkel der Winkel eines Dreieckes können nie in einer geraden Linie liegen, weil eine einzige gerade Linie die Fläche nicht nach allen Seiten hin begränzt, und zur Gränze eines geradlinigten Dreieckes, damit man eine Figur erhält, drei verschiedene gerade Linien erfordert werden [§. 12. Zus. I.].

II. Zusatz: In einem jeden solchen Dreiecke ist die Summe zweier Seiten allemal größer als die dritte Dreiecks-Seite.

Denn die drei Ecke des Dreieckes liegen nicht in einer geraden Linie [Zus. I.]; deßhalb bilden die zwei übrigen Seiten des Dreieckes zwischen den Endspunkten der dritten Seite eine gebrochene Linie [§. 3. c.], welche größer ist, als die dritte Dreiecks-Seite, die zwischen zwei Punkten die kürzeste Linie ist [§. 3. Zus. II.]. Daher ist [Fig. 19.] die Summe $AB + BC > AC$, ferner $AB + AC > BC$, und $AC + BC > AB$, indem man bei drei Seiten dreimal zwei verschiedene Seiten in eine Summe verbinden kann [Arithm. IV. §. 94.].

III. Zusatz: Der Unterschied zweier Seiten ist in dem Dreiecke allemal kleiner, als die dritte Seite. Denn [Fig. 19.] nach dem II. Zusatze ist

$$AB + BC > AC,$$

dann $$BC = BC,$$

also $$AB > AC - B$$ [Arithm. I. § 34. II.].

Wie nun $AC - BC < AB$, so ist aus den nämlichen Gründen $BC - AB < AC$, und $AB - AC < BC$.

IV. Zusatz: In kongruenten Dreiecken stehen gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln

glei-

gleiche Seiten entgegen, das ist (Fig. 21 und 22.), wenn △ ABC ≌ △ abc, so ist, wenn AC = ac, der Winkel B und b, und umgekehrt, wenn B = b, so muß auch AC = ac sein, weil sich sonst die Dreiecke, wenn man sie so auf einander legt, daß die gleichen Winkel auf einander fallen, nicht vollkommen decken würden, und deßhalb auch dieselben nicht kongruent wären (§. 1. Zus. II.).

Was von den Seiten AC und ac, und den opponirten Winkeln B und b gesagt wurde, gilt aus dem nämlichen Grunde von den übrigen Seiten und Winkeln.

V. Zusatz: Liegt von einer geraden Linie ein Punkt innerhalb eines Dreieckes, so wird sie, an ihren beiden Endspunkten verlängert, die Gränze oder den Perimeter des Dreieckes in zwei Punkten schneiden (§. 12. Zus. IV.), und somit wenigstens einen Schenkel eines jeden Dreieckswinkels berühren oder schneiden.

VI. Zusatz: Liegt von einer geraden Linie ein Punkt innerhalb eines hohlen Winkels, so wird sie, an ihren beiden Endspunkten verlängert, wenigstens einen Schenkel dieses Winkels schneiden.

Denn wenn (Fig. 23.) von der Linie mn ein Punkt m innerhalb des hohlen Winkels ABC liegt, was man mittels einer vom Punkte m zum Scheitel B gezogenen geraden Linie erkennen kann (§. 7. Anm. 4.), so kann man die Schenkel BA und BC, ohne die Größe des Winkels zu verändern (§. 7. Zus. II.), beliebig über den gegebenen Punkt m hinaus verlängern, und dann die Oeffnung des Winkels durch eine gerade Linie AC so schliessen, daß der Punkt m innerhalb des Dreieckes ABC liegt; weßhalb die verlängerte Linie mn wenigstens einen Schenkel des Winkels ABC schneidet (Zus. V.).

Anmerkung: 1) Hier versteht man unter dem Worte Dreieck allemal ein geradlinigtes Dreieck, dessen Gränzen drei gerade Linien sind (§. 12. g.), weil von sphärischen oder Kugel-Dreiecken, welche von Bögen der Kreislinien gebildet werden, noch nicht die Rede ist.

2) Das Dreieck bezeichnet man kurz mit diesem Zeichen (△).

3) Man sagt von Dreiecken:

a) Zwei Seiten schliessen einen Winkel ein, wenn sie im Dreiecke diesen Winkel bilden; daher schliessen (Fig. 20.) die Seiten AB und BC den Winkel B ein;

b) Ein Winkel liegt an einer Seite, oder ist ein anliegender Winkel, wenn die Seite ein Schenkel dieses Winkels ist; deßhalb sind (Fig. 20.) die beiden Winkel A und C zur Seite AC anliegende Winkel; und

c) Ein Winkel steht einer Seite gegenüber oder entgegen, oder ist opponirter Winkel, wenn diese Seite nicht ein Schenkel dieses Winkels ist; weßhalb (Fig. 20.) der Winkel B zur Seite AC ein opponirter Winkel ist, gleichwie umgekehrt die Seite AC zum Winkel B eine opponirte Seite ist.

Im nämlichen Sinne ist bei Vierecken und bei geradlinigten Figuren überhaupt von den einer Seite anliegenden Winkeln, oder den einen Winkel einschliessenden Seiten die Rede.

4) Bei Dreiecken wird die Neigung jeder zwei Seiten zu einander durch den hohlen Winkel bestimmt; weßhalb bei ihnen nur hohle Winkel vorkommen (§. 9. b.).

§. 19.

I. Aufgabe, aus drei gegebenen geraden Linien, von welchen allemal zwei zusammen größer sind als die dritte, ein Dreieck zu verzeichnen.

Auflösung:

1) Man nehme (Fig. 19.) eine der gegebenen Linien, z. B. die Linie AC, als Grundlinie an;

2) Aus A beschreibe man mit dem Halbmesser AB, und aus C mit dem Halbmesser CB Kreislinien (§. 14. Anm. 1.);

3) Diese Kreislinien, da die Basis AC ihre Zentrallinie ist, schneiden sich in zwei Punkten, die auf verschiedenen Seiten von AC liegen (§. 17.);

4) Zieht man nun von dem obern Durchschnittspunkte B zu den Endspunkten der Linie AC die geraden Linien BA und BC, so hat man das verlangte

Dreieck ABC, welches durch die drei gegebenen Linien AC, AB und BC gebildet wird.

I. Zusatz: Sind zwei der gegebenen Linien einander gleich, und wieder die Summen zweier Linien allemal größer, als die dritte Linie, so erhält man ein gleichschenklichtes Dreieck; wie (Fig. 20.) das Dreieck ABC, wo AC die Grundlinie, und AB = BC.

II. Zusatz: Sind alle drei der gegebenen Linien einander gleich, so erhält man das gleichseitige Dreieck (§. 17. Zus. I.); wie (Fig. 21.) das Dreieck ABC, wo AB = BC = AC.

III. Zusatz: Will man (Fig. 20.) über eine gegebene gerade Linie AC ein gleichschenklichtes Dreieck, z. B. das Dreieck ABC verzeichnen, so darf man nur mit Halbmessern, die einander gleich, aber größer als die Hälfte von AC sind, Kreise beschreiben, und vom obern Durchschnittspunkte B die geraden Linien AB und BC ziehen (§. 17. Zus. II.).

Auf die nämliche Weise kann man in einer Ebene auch auf der anderen Seite einer geraden Linie über sie ein gleichschenklichtes Dreieck verzeichnen; wie dieses bei Fig. 30. der Fall ist, wo in einer Ebene über AC die beiden gleichschenklichten Dreiecke ABC und ADC gezeichnet sind, da AC die Grundlinie für beide Dreiecke ist.

Anmerkung: 1) Wenn nicht allemal zwei von den gegebenen geraden Linien zusammen größer sind, als die dritte einzelne, so läßt sich daraus kein Dreieck verzeichnen; weil zwei Seiten eines Dreieckes allemal größer sind, als die dritte (§. 18. Zus. II.), und sich die über die Endspunkte einer geraden Linie beschriebenen Kreislinien nur dann durchschneiden, wenn die Zentrallinie und die Radien eine solche Größe haben, daß zwei von diesen Linien immerhin größer sind, als die dritte (§. 17.).

2) Weil sich in dieser Voraussetzung die Kreislinien in zwei Punkten schneiden, die auf verschiedenen Seiten der Zentrallinie liegen, so kann man das verlangte Dreieck in der nämlichen Ebene allemal über eine angenommene Basis auf beiden Seiten verzeichnen; wie dieses bei Fig. 18. der Fall ist, wo man aus den gegebenen Linien Bm, Em und BE über BE das obere Dreieck BmE, und das untere BnE verzeichnet hat, und dieses

ebenfalls das verlangte Dreieck ist, da BE auch Basis dafür ist, und Bm = Bn, wie auch Em = En.

3) Will man nur die Durchschnittspunkte bestimmen, zu denen von der Basis aus die geraden Linien gezogen werden, um die verlangten Dreiecke zu erhalten, so beschreibt man nie die ganzen Kreislinien, sondern nur Bögen (§. 14. g.), so groß, daß sie sich wirklich schneiden.

§. 20.

I. Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gleich sind, so sind auch die übrigen Winkel mit der dritten Seite gleich, und die Dreiecke sind kongruent.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 21 und 22.) in den beiden Dreiecken ABC und abc die Seite AB = ab, dann BC = bc, und der eingeschlossene Winkel B = b;

2) Man lege die Dreiecke so auf einander, daß sich die gleichen Winkel B und b decken, somit der Punkt B auf b, dann die Seite AB auf ab, und BC auf bc fällt, da man gleiche Winkel allemal so auf einander legen kann, daß sie sich vollkommen decken (§. 7. Zus. IV.);

3) Weil nach der Voraussetzung AB = ab, und BC = bc, so muß A auf a, und CB auf cb fallen, weil sonst, da man die Dreiecke auf diese Weise auf einander legt, die Linien AB und ab, dann BC und bc nicht einander gleich sein könnten (§. 3. Zus. V.);

4) Durch die Endspunkte ist die Größe und Lage einer geraden Linie bestimmt (§. 3. Zus. III.), und zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich (§. 3. Zus. II.); daher deckt AC die Linie ac, weil die Endspunkte dieser Linien nach Nro. 3. auf einander liegen, das heißt, es ist AC = ac;

5) Weil A auf a, AB auf ab, und AC auf ac liegt, so deckt der Winkel A den Winkel a; ferner

weil C auf c, CB auf cb und CA auf ca liegt, so deckt der Winkel C den Winkel c, das ist, die Winkel A und a, dann C und c sind auch einander gleich (§. 7. Anmerk. 2.), oder A = a, und C = c.

6) Es sind also unter der gesetzten Bedingung die beiden Dreiecke ABC und abc kongruent, da alle Seiten und alle Winkel der Ordnung nach einander gleich sind, und sich somit die Dreiecke selbst vollkommen decken (§. 1. Zus. I.); das heißt, wenn AB = ab, BC = bc, und B = b, so ist auch AC = ac, A = a, und C = c, und △ ABC ≌ △ abc.

Zusatz: Durch zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel ist ein Dreieck vollkommen bestimmt; weil ein anderes Dreieck mit eben diesen Bestimmungen mit dem vorigen kongruent, mithin damit ganz einerlei ist, und deßhalb unter dieser Voraussetzung nur ein einziges Dreieck dieser Art möglich ist (§. 6.).

Aus diesem Grunde sagt man auch, daß ein Dreieck durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gegeben sei; das ist, durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ist auch die Größe der übrigen Winkel und der dritten Seite bestimmt, und diese letzteren Stücke lassen sich aus den gegebenen allemal durch Rechnung finden.

Anmerkung: Was so eben im Zusatze in Absicht auf den im Lehrsatze angeführten Fall von Dreiecken gesagt wurde, gilt von diesen in allen übrigen Fällen, wo ihre Kongruenz erwiesen wird, wie auch von Vierecken, und überhaupt von Vielecken, wenn man weiß, daß sie durch gewisse Stücke bestimmt oder gegeben sind.

§. 21.

II. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten einander gleich sind, so sind es auch die Winkel, die diesen Seiten gegenüber stehen.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 21.) im Dreiecke ABC die Seite AB = BC;

2) Man verzeichne sich (Fig. 22.) ein anderes Dreieck abc so, daß ab = *AB*, dann bc = *BC*, und *B* = b;

3) Diese beiden Dreiecke sind, da sie zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich haben, kongruent (§. 20), und deßhalb der Winkel *A* = a, und *C* = c;

4) Nach der Voraussetzung ist *AB* = *BC*, und ab ist = *AB*, und bc = *BC* gemacht (Nro. 2.), folglich ist *AB* = *BC* = ab = bc;

5) Man lege die beiden Dreiecke umgekehrt auf einander, oder schlage sie über einander, so daß bc auf *AB* fällt; in dieser Lage werden sich die gleichen Winkel *B* und b ebenfalls decken (§. 7. Anm. 2.), und die Seite bc deckt die Seite *AB*, gleichwie ab die Seite *BC*; weßhalb sich auch die Winkel a und *C*, dann c und *A* decken, und a = *C*, wie auch c = *A* ist;

6) Nach Nro. 3. ist der Winkel *A* = a, und *C* = c, und nach Nro. 5. ist der Winkel a = *C*, und c = *A*; daher ist (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.) der Winkel *A* = *C* oder *C* = *A*.

Es sind also, wenn in einem Dreiecke zwei Seiten gleich sind, auch die opponirten Winkel gleich.

I. Zusatz: Im gleichschenklichten Dreiecke sind die beiden Winkel an der Grundlinie einander gleich; das ist (Fig. 20.), wenn *AB* = *BC*, so ist *C* = *A*.

II. Zusatz: Im gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich. Denn wenn (Fig. 21.) das Dreieck *ABC* gleichseitig ist (§. 18. c.), so ist *AB* = *BC*, also *C* = *A*, dann *AB* = *AC*, also *A* = *B*, endlich *BC* = *AC*, folglich *A* = *B*.

III. Zusatz: Das gleichseitige Dreieck ist eine reguläre Figur (§. 13. b.), weil in demselben alle Seiten einander gleich, und deßhalb auch alle Winkel unter sich gleich sind (Zus. II.).

§. 22.

III. Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken eine Seite, und die beiden anliegenden Winkel gleich sind, so sind es auch die beiden übrigen Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, und die Dreiecke sind kongruent.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 21 und 22.) in den beiden Dreiecken *ABC* und abc die Seite *AC* = ac, und der Winkel *A* = a, und *C* = c;

2) Man lege die Dreiecke so auf einander, daß die Seite *AC* die ihr gleiche Seite genau deckt, was bei gleichen geraden Linien allemal geschehen kann (§. 3. Zus. V.);

3) Weil der Winkel *A* = a, und *C* = c, und nach Nro. 2. die Seite *AC* auf ac, wie auch *A* auf a, und *C* auf c liegt, so muß auch in dieser Lage *AB* auf ab, und *CB* auf cb fallen, weil sich sonst die Winkel nicht decken würden, und deßwegen auch nicht gleich wären (§. 7. Anm. 2.);

4) Nun liegt der Punkt *B* in der Linie *AB*, mithin, da *AB* und ab auf einander liegen, auch in der Richtung von ab; und *B* liegt zugleich in der Linie *CB*, also auch in der Richtung von cb;

5) Daher liegt der Punkt *B* in jenem Punkte, wo die beiden Linien ab und cb einander schneiden, somit (§. 3. Zus. IV.) auf dem Punkte b;

6) Deßwegen decken sich die Linien *AB* und ab, wie auch bc und *BC*, daher ihre Endespunkte auf einander liegen (§. 20. Nro. 4.), und die Winkel *B* und b decken sich ebenfalls (§. 7. Anm. 2.).

Es sind also diese zwei Dreiecke, da sich der Ordnung nach alle ihre Seiten und Winkel, und sie sich somit selbst vollkommen decken, kongruent (§. 1. Zus. I.).

Zusatz: Durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel ist ein Dreieck vollkommen bestimmt;

denn ein anderes mit eben diesen Bestimmungen ist mit dem gegebenen kongruent, und es ist in dieser Voraussetzung nur ein einziges Dreieck dieser Art möglich (§. 6.).

Deßwegen sagt man auch, daß ein Dreieck durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sei (§. 20. Zus.).

Anmerkung: Die Richtigkeit des im Beweise dieses Lehrsatzes bei Nro. 5. Gesagten sieht man noch deutlicher ein, wenn man die Spitze des ersten Dreieckes, nämlich B, innerhalb des zweiten Dreieckes abc setzt, oder außer b in die Seiten ab oder bc, oder endlich außer das Dreieck abc, wo dann die an der Grundlinie anliegenden Winkel A und a, wie auch C und c gegen die Voraussetzung nicht mehr gleich wären, da sie sich bei den auf einander gelegten Dreiecken nur in dem einzigen Falle decken, daß der Punkt B auf b fällt.

§. 23.

IV. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel gleich sind, so sind es auch die Seiten, die diesen Winkeln gegenüber stehen.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 23.) im Dreiecke *ABC* der Winkel *BAC* = *ACB*;

2) Wären die diesen Winkeln opponirten Seiten *CB* und AB einander nicht gleich, und somit *ABC* kein gleichschenklichtes Dreieck, so läßt sich mit dem Halbmesser *CB* über *AC* gegen die Spitze *B* hin in der nämlichen Ebene ein gleichschenklichtes Dreieck verzeichnen, und dieses ist entweder das Dreieck *ADC*, wenn *AB* > *BC*, oder das Dreieck *AEC*, wenn *AB* < *BE*;

3) Im ersten Falle wäre *AD* = *DC*, somit der Winkel *DAC* oder *BAC* = *DCA*, und im zweiten wäre *AE* = *EC*, mithin der Winkel *EAC* oder *BAC* = *ECA*, weil im gleichschenklichten Dreiecke

die beiden Winkel an der Grundlinie einander gleich sind (§. 21. Zus. I.);

4) Nach der Voraussetzung (Nro. 1.) ist aber der Winkel *BAC* = *ACB*, also wären die drei Winkel *ACD*, *ACB* und *ACE* einander gleich; dieses ist aber unmöglich, weil sich diese drei Winkel nicht decken, da sie doch in der nämlichen Ebene den Schenkel *AC* und den Scheitel *C* gemein haben (§. 7. Zus. IV. und Anm. 2.);

5) Folglich ist *ABC* das über *AC* mit dem Halbmesser *BC* verzeichnete gleichschenklichte Dreieck, und die Seiten *AB* und *BC* sind einander gleich; das ist, wenn der Winkel *BAC* = A*CB*, so ist *CB* = A*B*.

I. Zusatz: Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel gleich sind, so ist es ein gleichschenklichtes Dreieck; das ist (Fig. 20.), wenn A = *C*, so ist *CB* = AB.

II. Zusatz: Wenn in einem Dreiecke alle drei Winkel einander gleich sind, so sind auch alle drei Seiten unter sich gleich, und das Dreieck ist eine reguläre Figur (§. 13. b.); denn wenn (Fig. 21.) alle drei Winkel einander gleich sind, so ist A = B, also BC = AC, ferner A = C, also BC = AB, endlich B = C, also AC = AB.

Anmerkung: Die Wahrheit dieses Lehrsatzes läßt sich auch auf die im §. 21. angezeigte Weise zeigen.

§. 24.

V. Lehrsatz:

Wenn zwei Dreiecke drei gleiche Seiten haben, so sind auch die Winkel gleich, und die Dreiecke sind kongruent.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 24, 25 und 26.) in den Dreiecken ABC und abc der Ordnung nach die drei Seiten des einen Dreieckes den drei Seiten des anderen gleich, somit AB = ab, dann BC = bc, und AC = ac;

2) Man lege in der nämlichen Ebene die beiden Dreiecke ABC und abc so neben einander, daß eine Seite z. B. BC die ihr gleiche Seite bc deckt, und verbinde die Punkte A und a, welche in dieser Lage nicht zusammen fallen, durch die gerade Linie Aa;

3) Der Punkt C oder c als der untere Endspunkt der Linien BC und bc kann jetzt eine dreifache Lage haben; er kann nämlich liegen

a) in der geraden Linie Aa, wie in der Figur 24, oder

b) in der gebrochenen Linie ACa unter der Linie Aa, wie in der Fig. 25., oder endlich

c) in der gebrochenen Linie ACa ober der Linie Aa, wie in Fig. 26;

4) In der ersten Lage (Fig. 24.) bilden beide Dreiecke zusammen das Dreieck ABa, wo nach der Voraussetzung AB = ab, folglich nach §. 21. der Winkel a = A; ferner ist die Seite AC der Seite ac gleich (per hyp.), weßhalb die Dreiecke ABC und abc, da sie zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich haben, kongruent sind (§. 20.);

5) In der zweiten Lage (Fig. 25.) erhält man die gleichschenklichten Dreiecke ABa und ACa, wo die Seite AB = ab, und AC = ac (per hyp.), also der Winkel n = m und p = o (§. 21.), somit n + p = m + o (Arithm. §. 25. I.), oder bac = BAc, weßhalb die Dreiecke ABC und abc kongruent sind, da sie wieder zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich haben;

6) Endlich in der dritten Lage (Fig. 26.) erhält man das gleichschenklichte Dreieck ABa, wo AB = ab (per hyp.), also der Winkel BaA = BAa (§. 21.); ferner ist im gleichschenklichten Dreiecke ACa die Seite AC = ac (per hyp.), also der Winkel p = o; somit BaA — p = BAa — o (Arithm. I. §. 34. I.), oder n = m; weßhalb die Dreiecke ABC und abc auch in dieser dritten Lage, da sie, wie vorhin, zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich haben, kongruent sind.

Es sind also immer zwei Dreiecke kongruent, wenn

die drei Seiten des einen Dreieckes der Ordnung nach den Seiten des anderen gleich sind, oder kürzer, wenn die Dreiecke alle Seiten gleich haben, das ist, wenn AB = ab, dann AC = ac, und BC = bc, so ist △ ABC ≌ △ abc.

Zusatz: Durch drei Seiten ist ein Dreieck vollkommen bestimmt oder gegeben; weil ein anderes Dreieck mit eben diesen Seiten mit dem gegebenen kongruent ist, und es in dieser Voraussetzung nur ein einziges Dreieck dieser Art gibt (§. 6.).

§. 25.

II. Aufgabe, an eine gegebene gerade Linie mit einem bestimmten Scheitelpunkte einen Winkel zu verzeichnen, der einem anderen gegebenen gleich ist.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 27.) der Winkel ABC gegeben, und (Fig. 28.) an die Linie bc soll ein Winkel verzeichnet werden, der dem gegebenen ABC gleich ist, und zum Scheitel den Punkt b hat;

2) Man beschreibe aus B mit einem beliebigen Halbmesser BC einen Kreisbogen, so groß, daß er die beiden Schenkel des gegebenen Winkels ABC schneidet (§. 19. Anm. 3.); es sind dann, wenn A und C die Durchschnittspunkte sind, die beiden Linien BC und BA einander gleich (§. 14. Zus. IV.);

3) Mit dem nämlichen Halbmesser, das ist, mit dem Radius bc = BC beschreibe man von b aus einen Kreisbogen ac, der wenigstens so groß ist als der Bogen AC, was leicht mit dem blossen Auge bestimmt werden kann;

4) Endlich beschreibe man von c aus mit dem Halbmesser AC einen Kreisbogen, so groß, daß er den vorigen in einem Punkte a schneidet, und ziehe die gerade Linie ba, es ist dann an der Linie bc mit dem Scheitel b der Winkel abc der verlangte Winkel, welcher dem gegebenen ABC gleich ist.

Beweis:

1) Man verbinde in beiden Figuren die Endspunkte der Bögen AC und ac durch die geraden Linien AC und ac;

2) Weil AB = BC, so ist AB + AC > BC, dann BC + AC > AB, und AB + BC > AC, weßhalb auch die Linien ab, bc und ac, die den vorigen gleich gemacht wurden, eine solche Größe haben, daß zwei von ihnen allemal zusammen größer sind, als die dritte einzeln, und aus ihnen kann das Dreieck abc verzeichnet werden (§. 19.);

3) Es ist die Linie bc = BC, und ac = AC (ex constr.); ferner ist ab = AB, weil beide Linien Radien von Kreisbögen sind, die mit den gleichen Halbmessern BC und bc beschrieben wurden;

4) Also sind die Dreiecke ABC und abc kongruent (§. 24.), und der Winkel abc = ABC, weil in kongruenten Dreiecken den gleichen Seiten ac und AC gleiche Winkel gegenüber stehen (§. 18. Zus. IV.).

Anmerkung: Weil beim geraden Winkel (§. 7. Zus. I.) die beiden Schenkel zusammen in einer geraden Linie liegen, und alle geraden Winkel einander gleich sind (§. 7. Zus. V.), so bezieht sich vorstehende Auflösung immer auf Winkel, die nicht gerade Winkel sind.

§. 26.

III. Aufgabe, einen gegebenen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung:

1) Um (Fig. 29.) den Winkel ABC zu halbiren, das ist, in zwei gleiche Theile zu theilen, beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser vom Scheitel B aus einen Kreisbogen, oder bestimme sich vielmehr nur damit in den Schenkeln des Winkels die beiden Durchschnittspunkte A und C, die vom Scheitel B gleich weit entfernt sind;

2) Mit einem Halbmesser, der größer ist als die Hälfte der geraden Linie, welche die Punkte A und C

verbinden würde, beschreibe man auf der andern Seite aus A und C Bögen, die sich in D schneiden (§. 17. Zus. II.);

3) Von B nach D ziehe man die gerade Linie BD, so theilet diese den gegebenen Winkel ABC in zwei Winkel ABD und DBC, die einander gleich sind.

Beweis:

1) Die Linie CD ist gleich der Linie AD (ex constr.); der Punkt D ist also von C und A gleich weit entfernt (§. 3. Zus. II.), und die Linie BD liegt zwischen BA und BC, weßhalb BD den Winkel ABC theilet (§. 7. Anmerk. 4.)

2) Bei der Auflösung dieser Aufgabe wurde die Linie BA = BC, und CD = AD gemacht, und DB = DB ist die gemeinschaftliche Seite der beiden Dreiecke ABD und BCD, daher sind diese kongruent (§. 24.), und die Winkel m und n sind einander gleich, oder ABD = DBC, da sie gleichen Seiten gegenüber stehen (§. 18. Zus. IV.).

Es theilet also die Linie BD den Winkel ABC in die zwei gleichen Winkel ABD und DBC, und halbirt deßhalb den gegebenen Winkel.

Zusatz: Halbirt man aufs Neue jeden Theil m und n, so bekömmt man nach der zweiten Halbirung 4 oder 2^2 gleiche Theile, nach der dritten 8 oder 2^3 gleiche Theile, nach der vierten Halbirung 16 oder 2^4, und überhaupt nach n Halbirungen 2^n gleiche Theile (Arithm. III. §. 69. a, b und f.).

§. 27.

IV. Aufgabe, eine gegebene gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung:

1) Es soll (Fig. 30.) die gerade Linie AC halbirt werden;

2) Man beschreibe in der nämlichen Ebene auf

jeder Seite von AC ein gleichschenklichtes Dreieck (§. 19. Zus. III.), somit die Dreiecke ABC und ADC;

3) Man verbinde ihre Spitzen B und D durch die gerade Linie BD, so wird diese die gegebene gerade Linie AC im Punkte E halbiren, in welchem BD die Linie AC schneidet.

Beweis:

1) Weil man über und unter AC gleichschenklichte Dreiecke verzeichnete, so ist AB = BC, und AD = CD;

2) Da überdieß BD für die zwei Dreiecke BAD und BCD eine gemeinschaftliche Seite ist, und BD = BD, so sind diese Dreiecke kongruent (§. 24.), und der Winkel m ist dem Winkel n gleich (§. 18. Zus. IV.);

3) In den Dreiecken ABE und EBC ist AB = BC (ex constr.), dann BE ist eine gemeinschaftliche Seite für beide Dreiecke, und nach Nro. 2. ist der eingeschlossene Winkel m = n, also ist △ ABE ≅ △ EBC, und deßhalb AE = EC, das ist, durch die Linie BD ist die gegebene Linie AC im Punkte E halbirt worden, da AC durch BD im Punkte E geschnitten wird (§. 2. Anmerk. 5.), der von den beiden Endspunkten A und C gleich weit entfernt ist.

I. Zusatz: Weil in Gemäßheit des hier gegebenen Beweises das Dreieck ABE mit dem Dreiecke BEC kongruent ist, und also der Winkel p seinem Nebenwinkel r gleich ist, so ist jeder dieser Winkel ein rechter Winkel (§. 8. d.), und die gerade Linie BD, welche AC halbirt, steht zugleich auf AC senkrecht.

II. Zusatz: Bei der ersten Halbirung erhält man 2 oder 2^1 gleiche Theile, bei der zweiten 4 oder 2^2, bei der dritten 8 oder 2^3 gleiche Theile, und überhaupt wird eine gerade Linie durch n Halbirungen in 2^n gleiche Theile getheilt.

§. 28.

VI. Lehrsatz:

Wenn man in einem Dreiecke eine Seite verlängert, so ist der äußere Winkel, den die Verlängerung mit der anliegenden Dreiecks-Seite bildet, größer, als der im Dreiecke der verlängerten Seite gegenüber stehende Winkel.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 31.) im Dreiecke ABC die Linie CD die Verlängerung von AC, somit ACD der äußere Winkel, den CD mit der anliegenden Dreiecks-Seite CB bildet;

2) Man halbire im Punkte E die Linie BC, ziehe von A nach E die gerade Linie AE, verlängere diese bis F, so daß EF = EA, und ziehe von F nach C die gerade Linie FC;

3) Es ist BE = EC, und AE = EF (ex constr.), dann der Winkel E = e, weil diese Winkel Scheitelwinkel sind (§. 10. Zus. II. und III.), weßhalb die Dreiecke ABE und EFC kongruent sind (§. 20.), und der Winkel n = B, weil diese Winkel den gleichen Seiten EF und AE gegenüber stehen (§. 18. Zus. IV.);

4) Der Punkt E liegt als der Mittelpunkt der Linie BC zwischen B und C, somit die Linie AE oder AF zwischen AB und AC oder AD, und der Punkt F liegt, weil man AE gegen diese Seite hin verlängerte, zwischen B und D, folglich CF zwischen CB und CD, und der Winkel BCD ist durch CF getheilt (§. 7. Anm. 4.);

5) Weil das Ganze größer ist, als nur ein Theil desselben (Arithm. I. §. 10. Nro. 3.), so ist der Winkel BCD > n, und nach Nro. 3. ist der Winkel n = B, weßhalb (Arithm. I. §. 10. Nro. 5.) der Winkel BCD > B, das ist, der äußere Winkel ist größer, als der der verlängerten Seite gegenüber stehende Dreiecks-Winkel.

I. Zusatz: Im Dreiecke ist der äußere Winkel größer, als jeder von den beiden innern entgegengesetzten Dreiecks-Winkeln, von welchen nämlich keiner sein Nebenwinkel ist.

Man verlängere die Seite BC am Ecke C, so ist nach dem Lehrsatze der äußere Winkel ACG > BAC, ferner ACG = BCD (§. 10. Zus. III.), also BCD > BAC, oder BCD > A, und es ist auch BCD > B, das ist, der äußere Winkel ist größer, als jeder der beiden innern entgegengesetzten B und A.

II. Zusatz: Zwei Winkel in einem Dreiecke halten zusammen allemal weniger, als 180 Grad, oder sind kleiner, als zwei rechte Winkel.

Denn (Fig. 31.) ist BCD der äußere Winkel, so ist (Zus. II.)

$$BCD > B, \text{ und } BCD > A,$$
$$\text{dann } m = m, \quad m = m,$$
$$\text{also } BCD + m > B + m, \text{ und } BCD + m > A + m,$$
$$\text{ferner } BCD + m = 2R \text{ (§. 8. Zus. III.)},$$
$$\text{somit } B + m < 2R, \text{ und } A + m < 2R,$$
$$\text{oder } B + C < 2R, \text{ und } A + C < 2R.$$

Wird die Seite CA am Ecke A verlängert, so zeigt man aus den nämlichen Gründen, daß auch B + A < 2R.

Weil man bei drei Winkeln dreimal zwei verschiedene Winkel in eine Summe verbinden kann (Arithm. IV. §. 94.), so sind zwei Winkel eines Dreieckes zusammen allemal kleiner, als zwei rechte Winkel, und deßhalb da zwei rechte Winkel 180 Grad halten (§. 11. Zus. I.), auch kleiner als 180 Grad.

Aus diesem Grunde sind auch in einem Dreiecke alle Winkel hohl (§. 9. b.).

III. Zusatz: Wenn zwei gerade Linien, die in einem Punkte zusammen stoßen, von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, so ist der äußere Winkel größer, als der innere entgegengesetzte, und die beiden inneren Winkel zusammen weniger als 180 Grad.

Denn wenn (Fig. 31.) die im Punkte B zusammen stoßenden geraden Linien BA und BC in den

Punk-

Punkten A und C durch HD geschnitten werden, so erhält man das Dreieck ABC, wo nach dem Lehrsatze und dem vorigen Zusatze der Winkel BCD > BAD, und BAC + ACB < 180°, oder kürzer A + C < 180 Grad.

IV. Zusatz: In jedem Dreiecke sind wenigstens zwei Winkel allemal spitzig.

Denn hätte das Dreieck zwei rechte oder zwei stumpfe Winkel, oder einen rechten und einen stumpfen zugleich, so hielten zwei solche Winkel 180 Grad, oder mehr als 180°, was nicht möglich ist, weil zwei Winkel eines Dreieckes allemal weniger als 180 Grad haben (Zus. II.)

V. Zusatz: Im gleichschenklichten Dreiecke sind beide Winkel an der Grundlinie spitzig, weil es sonst in einem Dreiecke, da diese Winkel einander gleich sind, zwei rechte oder zwei stumpfe Winkel gäbe, was nicht möglich ist (Zus. IV.).

VI. Zusatz: Der äußere Winkel ist spitzig, stumpf, oder ein rechter Winkel, je nachdem der anliegende Dreieckswinkel, der zu ihm ein Nebenwinkel ist (§. 8. a.), ein spitziger, stumpfer (§. 9. Zus. V.), oder ein rechter Winkel ist (§. 9. Zus. III.).

§. 29.

Eintheilung der Dreiecke in spitzwinklichte, stumpfwinklichte und rechtwinklichte Dreiecke.

In Absicht auf die Größe der Winkel heißt ein Dreieck

a) spitzwinklicht (Triangulum acutangulum), wenn alle drei Winkel spitzig sind, dann

b) stumpfwinklicht (Triangulum obtusangulum), wenn es einen stumpfen Winkel hat, und endlich

c) rechtwinklicht (Triangulum rectangulum), wenn dasselbe einen rechten Winkel hat.

Im rechtwinklichten Dreiecke heissen die Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen, Perpendikel oder Katheten, und jene Seite,

welche dem rechten Winkel gegenüber steht, heißt die Hypotenuse.

d) Ueberhaupt heissen die Dreiecke schiefwinklicht, wenn sie keinen rechten Winkel haben, und somit nicht rechtwinklich sind.

Zusatz: Im rechtwinklichten und stumpfwinklichten Dreiecke sind allemal zwei Winkel spitzig (§. 28. Zus. IV.), in jenem ist der rechte, und in diesem der stumpfe Winkel der größte Winkel; und die schiefwinklichten Dreiecke sind entweder spitzwinklichte, oder stumpfwinklichte Dreiecke.

§. 30.

VII. Lehrsatz:

Im Dreiecke steht der größeren Seite der größere Winkel entgegen.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 32.) im Dreiecke ABC die Seite AC > AB;

2) Man trage die kleinere Seite AB von A aus auf AC auf, mache dadurch AD = AB, und ziehe die gerade Linie BD, man erhält das gleichschenklichte Dreieck ABD, wo der Winkel m = n ist (§. 21. Zus. I.);

3) Weil nach Nro. 1. die Seite AC > AB ist (per hyp.), und AB = AD, so ist auch AC > AD, und der Punkt D liegt zwischen A und C, weßhalb die Linie BD den Dreieckswinkel ABD theilet, und der Winkel m, weil er nur ein Theil von B ist, ist kleiner als B, oder B > m;

4) Der Winkel n oder ADB ist in Absicht auf das Dreieck BDC ein äußerer Winkel, und deßhalb größer als der Winkel c (§. 28.), somit ist ABC größer als BDC oder B > C, da B > m, dann m = n, und n > C; das ist, im Dreiecke steht der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

I. Zusatz. Im Dreiecke steht dem größeren Win-

kel die größere Seite gegenüber; das ist (Fig. 32.), wenn der Winkel B > C, so ist AC > AB.

Denn wäre AC = AB, so müßte auch der Winkel B = C sein (§. 21.), und wäre AC < AB, so müßte nach dem Lehrsatze B < C sein; beides ist aber gegen die Voraussetzung, also muß AC > AB sein, d. h., wenn B > C, so ist AC > AB.

II. Zusatz: Im Dreiecke steht der größten Seite der größte Winkel, und der kleinsten Seite der kleinste Winkel entgegen; und umgekehrt.

III. Zusatz: Im ungleichseitigen Dreiecke (§. 18. a.) ist kein Winkel dem anderen gleich, und umgekehrt ein Dreieck von lauter ungleichen Winkeln ist ungleichseitig.

IV. Zusatz: Im rechtwinklichten Dreiecke ist die Hypotenuse die größte Seite, und im stumpfwinklichten jene Seite, die dem stumpfen Winkel entgegen steht.

§. 31.

VIII. Lehrsatz:

Wenn in einer Ebene zwei Dreiecke eine Seite gemein haben, und die Spitze des einen innerhalb des andern Dreieckes liegt, so ist der untere von den beiden der gemeinschaftlichen Seite opponirten Winkeln größer, als der obere Winkel, und die Summe der beiden Seiten, welche den oberen Winkel einschließen, größer als die Summe der Seiten, welche den untern einschließen.

Beweis:

1) Es haben (Fig. 33.) die beiden Dreiecke ABC und ADC die gemeinschaftliche Basis AC, und die Spitze D des Dreieckes ADC sei innerhalb des Dreieckes ABC;

2) Man verlängere AD, bis die Dreiecksseite BC in E geschnitten wird, dann ist D zum Dreiecke DEC

ein äußerer Winkel, und m ist ein solcher für das Dreieck ABE, weßhalb D > m, und m > B (§. 28.), folglich D > B (Arithm. I. §. 10. Nro. 7.), das ist, der untere Winkel D ist größer, als der obere B, welcher wie D, der angenommenen Basis AC gegenüber steht.

3) Nach dem II. Zusatze des §. 18. ist ferner AB + BE > AE, und, da AE = AD + DE, auch

$$AB + BE > AD + DE,$$

dann $DE + EC > DC$, mithin (Arithm. I. §. 25. III.)

$$AB + BE + DE + EC > AD + DE + DC,$$

folglich $AB + BE + EC > AD + DC$,

oder $AB + BC > AD + DC$;

da man auf beiden Seiten die nämliche Linie DE subtrahirt (Arithm. I. §. 34. II.), und BE + EC = BC.

Es ist also die Summe der beiden Seiten, welche den obern Winkel einschließen, größer, als die Summe der Seiten, welche den untern Winkel bilden.

Zusatz: Nimmt man (Fig. 33.) innerhalb des Dreieckes ABC den Punkt D an, und zieht man zu den Endspunkten der als Basis angenommenen Seite AC die geraden Linien DA und DC, so ist nach dem aufgestellten Lehrsatze der Winkel ADC oder D > B, und AB + BC > AD + DC.

§. 32.

V. Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt einer geraden Linie ein Perpendikel zu ziehen.

Auflösung:

1) Ist (Fig. 34.) der gegebene Punkt ein Endspunkt, so verlängere man gegen B hin die gegebene Linie beliebig, etwa bis zu C;

2) Aus B schneide man auf der geraden Linie AC, auf welche durch den Punkt B ein Perpendikel errichtet werden soll, durch Hilfe des Zirkels mit einem beliebigen Halbmesser die gleichen Stücke BD und BE ab;

3) Man verzeichne über DE ein gleichschenklichtes

Dreieck nach jener Seite hin (§. 19. Zus. III.), wo man das Perpendikel errichten will, somit das Dreieck DFE, wenn man von BD aus nach der oberen Seite von AC das Perpendikel ziehen will;

4) Vom Punkte F als der Spitze dieses Dreieckes ziehe man zu B die gerade Linie FB, so ist dieses vom Punkte B aus das verlangte Perpendikel auf die gerade Linie AC, oder auf Linie AB.

Beweis:

1) Die Linie DB = BE, und DF = EF (ex constr.), und dann BE = BF, also △ DBF ≅ △ FBE (§. 24.);

2) In kongruenten Dreiecken stehen gleichen Seiten gleiche Winkel entgegen (§. 18. Zus. IV.), weßhalb m = n, da DF = EF;

3) Die beiden gleichen Winkel m und n sind Nebenwinkel (§. 8. a.), da BF ihr gemeinschaftlicher Schenkel, und DB und BE Theile der nämlichen geraden Linie AC sind;

4) Daher ist BF vom Punkte B auf AC, und deßhalb auch auf AB das verlangte Perpendikel (§. 8. d.).

I. Zusatz: Wird (Fig. 34.) die Linie FB gegen die untere Seite von AC verlängert, so erhält man durch den nämlichen Punkt B auf dieser Seite in der nämlichen Ebene das Perpendikel BQ, weil die Verlängerung von FB auch auf AC senkrecht ist (§. 10. Zus. IV.).

II. Zusatz: Durch einen Punkt einer geraden Linie gibt es auf jeder Seite der Linie in einer Ebene nur ein Perpendikel.

Denn gäbe es (Fig. 34.) von B auf der oberen Seite von AC auch das Perpendikel BG, so wäre der Winkel FBC = GBC, da jeder von ihnen ein rechter Winkel wäre (§. 8. c. und d.); dieses ist aber nicht möglich, weil sich diese Winkel nicht decken, da sie doch in der nämlichen Ebene so auf einander liegen, daß sie den Scheitel B und den Schenkel BC gemein haben (§. 7. Zus. IV. und Anm. 2.).

Um deßwillen kann in einer Ebene auf AC vom Punkte B auf der oberen Seite nur BF, und auf der unteren nur BQ senkrecht sein.

Anmerkung: Will man ohne Beweisführung nur (Fig. 34.) das Perpendikel BF errichten, so beschreibe man zur Bestimmung des Punktes F mit dem Halbmesser DF = FE Bögen so groß, daß sie sich schneiden (§. 19. Anm. 3.), ohne daß man auch wirklich die geraden Linien DF und FE zieht.

§. 33.

VI. Aufgabe, von einem bestimmten Punkte außerhalb einer gegebenen geraden Linie auf sie ein Perpendikel zu errichten.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 30.) die Linie AC gegeben, und auf sie vom Punkte B ein Perpendikel zu errichten;

2) Man nehme in der Linie AC einen beliebigen Punkt H, und beschreibe aus B mit einem Halbmesser, der größer als BH ist, eine Kreislinie, oder bestimme vielmehr nur die Punkte E und F, in welchen die Kreislinie die gerade Linie AC schneide (§. 16.);

3) Ueber EF errichte man auf der anderen Seite von B das gleichschenklichte Dreieck EDF (§. 19. Zus. III.);

4) Man ziehe von B nach D die gerade Linie BD, so ist diese das verlangte Perpendikel.

Beweis:

1) Es ist nach Nro. 2 und 3. die Linie EB = BF, dann ED = FD, und BD = BD, mithin △ BED ≌ △ BFD (§. 24.), und deßhalb der Winkel m = n (§. 18. Zus. IV.);

2) Da m = n, ferner BE = BF, und BG = BG, so ist △ EBG ≌ △ GBF (§. 20.), und der Winkel p = q;

3) Die Winkel p und q sind Nebenwinkel, da sie den Schenkel GB gemein haben, und EG und GF

Theile der nämlichen geraden Linie AC sind; deßwegen ist jeder der Winkel p und q ein rechter Winkel (§. 8. c.), und BG oder BD steht von dem außerhalb der Linie AC gegebenen Punkte B aus auf diese Linie perpendikulär.

I. Zusatz: Von einem Punkte außer einer Linie gibt es auf diese nur einen Perpendikel.

Denn gäbe es (Fig. 35.) noch ein zweites Perpendikel, etwa BE, so wäre der Winkel BEG oder E ein rechter Winkel, gleichwie es p ist, somit wäre $E + p = 2R$, was nicht möglich ist (§. 25. Zus. III.).

II. Zusatz: Das Perpendikel ist die kürzeste Linie, die von einem Punkte auf eine andere gerade Linie gezogen wird. Denn (Fig. 35.) jede andere gerade Linie, z. B. die Linie BE, ist größer, als das Perpendikel BG, weil sie im rechtwinklichten Dreiecke EBG die Hypotenuse ist (§. 30. Zus. IV.); deßwegen nennt man auch das Perpendikel BG den Abstand, die Distanz oder die Entfernung des Punktes B von der geraden Linie AC.

III. Zusatz: Man erhält allemal die Höhe des Dreieckes (§. 18. f.), wenn man von der Spitze des Dreieckes auf die Grundlinie ein Perpendikel zieht, welches zugleich die Entfernung der Spitze von der Grundlinie angibt (Zus. II.).

IV. Zusatz: Wenn zwei oder mehrere Dreiecke eine gemeinschaftliche Spitze haben, und ihre Grundlinien neben einander in einer einzigen geraden Linie liegen, so haben sie alle eine gemeinschaftliche Höhe.

Daher haben (Fig. 36.) die Dreiecke EBF, FBG, GBH und BHM die gemeinschaftliche Höhe BH, weil sie alle die gemeinschaftliche Spitze B haben, und ihre Grundlinie EF, FG, GH und HM neben einander in der geraden Linie AC liegen (Zus. I.).

V. Zusatz: Wenn man (Fig. 36.) in der geraden Linie DH, welche im Punkte H auf die gerade Linie AC perpendikulär steht, einen beliebigen Punkt B annimmt, und in der Linie AC zwei Punkte F und M bestimmt, welche vom Punkte H gleich weit ent-

fernt sind, so sind die geraden Linien BF und BM, die von B nach F und M gezogen werden, einander gleich, und bilden mit der Linie AC gegen das Perpendikel hin zwei Winkel q und x, die spitzig und einander gleich, und auf der andern Seite zwei Winkel p und y, welche stumpf, und ebenfalls einander gleich sind.

Denn der Winkel $t = u$, weil BH auf AC perpendikulär ist, dann $HF = HM$ (ex constr.), und $BH = BH$, also $\triangle BHF \cong \triangle BHM$ (§. 20.), und $BF = BM$, wie auch $q = x$ (§. 18. Zus. IV.), und die Winkel q und x sind spitzig, weil in den rechtwinklichten Dreiecken BFH und BHM die Winkel t und u die rechten Winkel sind (§. 29. Zus.); ferner p und q, wie auch x und y sind Nebenwinkel (§. 8. a.), und deßhalb p und y, da q und x spitzig sind, stumpfe Winkel (§. 9. Zus. V.); überdieß ist

$$\left.\begin{array}{ll} & p + q = 2R, \\ \text{und} & x + y = 2R, \end{array}\right\} \text{§. 8. Zus. III.}$$

$$\begin{array}{ll} \text{also} & p + q = x + y, \\ \text{dann} & q = x \\ \hline \text{folglich} & p = y. \end{array}$$

Das heißt, wenn DH auf AC perpendikulär ist, und $HF = HM$, so ist $BF = BM$, dann $q = x$, und $p = y$, während jene Winkel spitzig, und diese stumpf sind.

VI. Zusatz: Wenn DH auf AC senkrecht steht, und BE vom Perpendikel weiter absteht, als BF, somit $HE > HF$, so ist $BE > BF$, hingegen der Winkel $m < q$.

Denn das Dreieck BFH ist wegen des rechten Winkels bei H rechtwinklicht, und deßhalb der Winkel q spitzig (§. 29. Zus.), daher p stumpf (§. 9. Zus. V.), und im Dreiecke BEF die Seite $BE > BF$ (§. 30. Zus. IV.).

Ferner ist q zum Dreiecke BEF ein äußerer Winkel, und deßhalb größer als m (§. 28.), folglich $m < q$.

VII. Zusatz: Und umgekehrt, wenn (Fig. 36.)

BG dem Perpendikel BH näher liegt, als BF, somit HG < HF, so ist BG < BF, und hingegen s > q. Denn der Winkel s ist im rechtwinklichten Dreiecke BGH wegen des rechten Winkels bei H spitzig, und daher sein Nebenwinkel r stumpf, und BG < BF; ferner ist s als der äußere Winkel größer, als q.

VIII. Zusatz: a) Wenn man (Fig. 36.) beim rechten Winkel DHC vom beliebigen Punkte B des Schenkels DH auf den andern Schenkel HC oder seine Verlängerung, somit auf AC, ein Perpendikel zieht, so fällt es mit DH in eine Linie zusammen, und berührt deßhalb den Schenkel HC im Punkte H, weil von B auf die gerade Linie AC, in welcher HC liegt, nur ein einziges Perpendikel möglich ist (Zus. I.), und beim rechten Winkel ein Schenkel auf den andern perpendikulär steht (§. 9. Zus. IV.).

b) Zieht man beim spitzigen Winkel BCG von einem beliebigen Punkte B des Schenkels BG auf den andern Schenkel GC oder seine Verlängerung, somit auf AC, das Perpendikel BH, so liegt es innerhalb des spitzigen Winkels BGC.

Denn wenn BGC spitzig, so ist sein Nebenwinkel BGA stumpf (§. 9. Zus. V.), und das Perpendikel BH kann weder mit BF zusammen fallen, weil BF mit AC schiefe Winkel bildet (per hyp.), noch auf die Verlängerung von CG gegen A hin, etwa auf BF fallen, weil es sonst ein Dreieck BFG gäbe, wo ein stumpfer, und zugleich ein rechter Winkel wäre, was nicht möglich ist (§. 29. Zus.); deßhalb muß das Perpendikel BH gegen C hin den Schenkel GC schneiden, und somit innerhalb des spitzigen Winkels BGC liegen.

c) Zieht man endlich (Fig. 36.) beim stumpfen Winkel BGA von einem beliebigen Punkte B des Schenkels BG das Perpendikel BH auf den andern Schenkel GA oder dessen Verlängerung GC, somit auf AC, so fällt es außerhalb des stumpfen Winkels BGA auf die Verlängerung GC. Denn der Winkel BGA ist stumpf (per hyp.), also sein Nebenwinkel BFC spitzig (§. 9. Zus. V.), und vom Punkte B gibt

es auf AC nur ein Perpendikel, deßhalb liegt BH inner BGC, und fällt außerhalb des stumpfen Winkels BGA auf die Verlängerung GC.

IX. Zusatz: Wenn man demnach in einem Dreiecke von der Spitze auf die Grundlinie die Höhe zieht (Zus. III.), so fällt die Höhe

a) innerhalb des Dreieckes, wenn der Grundlinie zwei spitzige Winkel anliegen, wie (Fig. 36.) beim Dreiecke FBM die Höhe BH, weil die Winkel q und x spitzig sind;

b) Die Höhe fällt mit einer Dreiecksseite zusammen, wenn an der Grundlinie ein rechter Winkel ist, wie (Fig. 36.) beim Dreiecke BHM die Höhe BH, weil der Winkel BHM = R; endlich

c) fällt die Höhe außerhalb des Dreieckes auf die Verlängerung der Basis, wenn an der Grundlinie ein stumpfer Winkel liegt, wie (Fig. 36.) beim Dreiecke BFG die Höhe BH, weil r ein stumpfer Winkel ist.

Anmerkung: Mechanisch kann man auch auf dem Papier auf verschiedene Weisen von gewissen Punkten auf gerade Linien Perpendikel ziehen; z. B. mittels eines Triangels aus Holz oder Messing, oder durch das Winkelmaaß, das aus zwei zu einem rechten Winkel mit einander verbundenen Regeln besteht.

§. 34.

IX. Lehrsatz:

Durch zwei Seiten, nebst dem Winkel, der der größern Seite gegenüber steht, ist ein Dreieck vollkommen bestimmt.

Beweis:

Der Winkel, welcher der größern Seite gegenüber steht, kann ein rechter, oder ein stumpfer, oder endlich ein spitziger Winkel sein.

a) Ist (Fig. 36.) im Dreiecke BFH die Seite BF und BH, und der rechte Winkel H oder t gegeben, welcher der Seite BF entgegen steht, die nach der Voraussetzung und wegen des opponirten rechten Winkels größer ist als BH, so ist, wenn BH zur Basis genommen wird, die Lage der Spitze F gegeben, da jede andere von B nach AC gezogene gerade Linie, die dem Perpendikel BH näher läge, kleiner (§. 33. Zus. VII.), und jede mehr entfernte größer wäre, als die gegebene Linie BF (§. 33. Zus. VI.); durch die Lage der Punkte F und H, welche die Endspunkte der Linie HF sind, ist die Größe der Linie HF, und somit wegen der zum Voraus schon gegebenen Seiten BF und BH das Dreieck BFH selbst vollkommen bestimmt (§. 24. Zus.).

b) Ist (Fig. 36.) im Dreiecke BFE nebst dem stumpfen Winkel p die opponirte Seite BE und die anliegende BF gegeben, so ist nach der Voraussetzung und wegen des opponirten stumpfen Winkels BE > BF; nimmt man nun BF zur Basis, so ist, wie vorhin, die Lage der Spitze E gegeben, und das Dreieck BFE ist durch die gegebenen Stücke wieder vollkommen bestimmt.

c) Ist endlich (Fig. 36.) der gegebene Winkel x spitzig, und von den gegebenen Seiten BE und BM im Dreiecke BEM erstere Seite BE > BM, und man nimmt abermal BM zur Basis, so ist wieder die Lage der Spitze E gegeben, weßhalb auch in diesem Falle das Dreieck BEM vollkommen bestimmt ist.

I. Zusatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten gleich haben, nebst dem Winkel, der der größern Seite gegenüber steht (§. 6.).

II. Zusatz: Zwei rechtwinklichte Dreiecke sind kongruent, wenn sie ein Perpendikel und die Hypotenuse gleich haben, da diese die größere Seite ist (§. 30. Zus. IV.), und ihr der rechte Winkel, welcher allemal 90 Grad hat (§. 8. Zus. IV. und §. 11. Zus. I.), gegenüber steht.

§. 35.

X. Lehrsatz:

Für zwei gegebene Seiten und den gegebenen Winkel, der der kleineren Seite gegenüber steht, sind zwei Dreiecke möglich, wo der Winkel, der der größeren Seite gegenüber liegt, in dem einen Dreiecke stumpf, und in dem andern spitzig ist.

Beweis:

1) Die gegebene größere Seite (Fig. 36.) sei BE, und der gegebene Winkel, welcher der kleinern Seite entgegensteht, sei der Winkel BEC;

2) Dieser Winkel ist spitzig, weil sonst der Winkel, der im Dreiecke der größern Seite BE opponirt ist, ein stumpfer sein müßte (§. 30.), wenn BEC ein rechter oder stumpfer Winkel wäre, was nicht möglich ist (§. 28. Zus. IV.);

3) Man errichte B auf EC das Perpendikel BH, so fällt dieses innerhalb des spitzigen Winkels (§. 33. Zus. VIII. b.);

4) Man ziehe zwischen E und H von einem beliebigen Punkte F des Schenkels EC zu B die gerade Linie BF, so ist diese, da sie dem Perpendikel B näher liegt als BF (ex constr.), kleiner als die Linie BE (§. 33. Zus. VII.), was auch aus dem ersichtlich ist, daß der Winkel q im rechtwinklichten Dreiecke BHF spitzig (§. 29. Zus.), somit sein Nebenwinkel p stumpf (§. 9. Zus. V.), und deßhalb BE größer als BF ist (§. 30. Zus. IV.);

5) Man setze, die kleinere der gegebenen Seiten sei = BF, so ist BEF das eine mögliche Dreieck, wo die gegebenen Seiten BE und BF nebst dem Winkel BEC oder BEF (§. 7. Zus. II.) vorkommen, welcher der kleinern Seite BF gegenüber steht;

6) Man beschreibe von B aus mit dem Halbmesser BF, welcher größer als BH ist (§. 30. Zus. IV.),

eine Kreislinie, welche die Linie EC auch noch im Punkte M auf der andern Seite des Perpendikels schneiden wird (§. 16.), oder bestimme sich vielmehr nur in der Linie EC den Punkt M, von dem man nach B die gerade Linie MB zieht, welche der Linie BF gleich ist (§. 14. Zus. IV.), während auch im gleichschenklichten Dreiecke BFM an der Grundlinie FM die beiden Winkel q und x einander gleich sind (§. 21. Zus. I.);

7) Man hat jetzt das zweite mögliche Dreieck BEM, wo die gegebenen Seiten BE und BF, da letztere = BM, und der gegebene Winkel BEC oder BEM vorkommen;

8) Endlich ist im Dreiecke BEF der Winkel p, welcher der größern BE Seite opponirt ist, stumpf (Nro. 4.), und im Dreiecke BEM des Winkels x, welcher der nämlichen Seite BE gegenüber steht, spitzig, weil das Dreieck BFM gleichschenklicht ist, und da beide Winkel an der Grundlinie spitzig sind (§. 28. Zus. V.).

Also sind bei zwei gegebenen Seiten und dem Winkel, der der kleinern Seite gegenüber steht, zwei verschiedene Dreiecke möglich, wo diese Stücke vorkommen, und der der größern Seite opponirte Winkel in dem einen Dreiecke stumpf, und in dem andern spitzig ist.

I. Zusatz: Durch zwei Seiten nebst dem Winkel, der der kleinern Seite entgegen steht, ist ein Dreieck nicht vollkommen bestimmt (§. 6.); weil es (Fig. 36.) in dieser Voraussetzung zwei verschiedene Dreiecke BEF und BEM gibt, die nicht gleiche Quantität und Qualität haben, und deßhalb auch nicht kongruent sind.

II. Zusatz: Die beiden Winkel p und x, welche (Fig. 36.) in den Dreiecken BEF und BEM der gemeinschaftlichen größeren Seite BE opponirt sind, betragen zusammen zwei rechte Winkel oder 180 Grad. Denn p und q sind Nebenwinkel (§. 8. a.), also $p + q = 180$ Grad (§. 11. Zus. III.); ferner ist $q = x$, weil B das Dreieck FBM gleichschenklicht ist (§. 21. Zus. I.), also $p + x = 2R = 180$ Grad (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.).

§. 36.

XI. Lehrsatz:

Wenn man im gleichschenklichten Dreiecke von der Spitze aus die Grundlinie durch eine Linie halbirt, so theilet sie auch den Winkel an der Spitze in zwei gleiche Theile, und steht auf die Grundlinie perpendikulär.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 37.) das Dreieck ABC gleichschenklicht, und die von der Spitze B gezogene gerade Linie BD halbire die Basis AC, daß somit AD = CD.

2) Nach der Voraussetzung ist AB = BC, dann AD = DC, und BD als gemeinschaftliche Seite = BD, somit △ ABD ≅ △ BDC (§. 24.), und p = q, wie auch m = n, weil die Winkel p und q den gleichen Seiten AD und DC, und die Winkel m und n den gleichen Seiten AB und BC opponirt sind (§. 18. Zus. IV.);

3) Die gleichen Winkel m und n sind Nebenwinkel (§. 8. a.), weßhalb BD auf AC senkrecht steht (§. 8. c. und d.).

Also theilet die gerade Linie BD, wenn sie von der Spitze B aus die Basis AB halbirt, den Winkel an der Spitze in zwei gleiche Theile, und steht auf die Grundlinie perpendikulär.

I. Zusatz: Wenn im gleichschenklichten Dreiecke eine gerade Linie den Winkel an der Spitze halbirt, so halbirt sie auch die Grundlinie, und steht darauf senkrecht.

Denn wenn (Fig. 37.) der Winkel B halbirt wird, so ist p = q; ferner ist AB = BC und BD = BD also △ ABD ≅ △ BDC (§. 20.), und AD = DC, wie auch m = n, d. h., nach dieser Voraussetzung halbirt BD die Grundlinie AC, und steht darauf senkrecht.

II. Zusatz: Zieht man im gleichschenklichten Dreiecke von der Spitze auf die Grundlinie ein Per-

pendikel, so halbirt dieses sowohl den Winkel an der Spitze, als auch die Grundlinie.

Denn (Fig. 37.), wenn BD auf AC von der Spitze B aus senkrecht steht, so ist $m = n = 90^\circ$; ferner ist $AB = BC$, und $BD = BD$, also $\triangle ABC \cong \triangle BDC$ (§. 34. Zus. II.), weßhalb $p = q$, und $AD = DC$.

III. Zusatz: Wenn man im gleichschenklichten Dreiecke ABC die Grundlinie AC durch ein Perpendikel halbirt, so geht es durch die Spitze des Dreieckes. Denn wenn dieses Perpendikel nicht durch die Spitze B ginge, so könnte man von B nach D die gerade Linie BD ziehen, sie wäre nach dem Lehrsatze, weil sie AC halbirt, auf AC senkrecht, und es gäbe in einer Ebene vom Punkte D aus auf der nämlichen Seite von AC auf diese Linie zwei Perpendikel, was nicht möglich ist (§. 32. Zus. II.); deßwegen muß das Perpendikel, welches vom Mittelpunkte der Basis gezogen wird, durch die Spitze des gleichschenklichten Dreieckes gehen.

IV. Zusatz: Wenn in einer Ebene zwei gleichschenklichte Dreiecke eine gemeinschaftliche Basis haben, und auf verschiedenen Seiten derselben liegen, so halbirt die gerade Linie, welche die Spitzen dieser Dreiecke verbindet, sowohl die Winkel an den Spitzen, als auch die Grundlinie, und steht auf dieser letztern senkrecht.

Es seien (Fig. 37.) in der nämlichen Ebene die Dreiecke ABC und AEC, welche die nämliche Basis AC haben, gleichschenklicht, und man errichte im obern Dreiecke ABC von B auf AC das Perpendikel BD, so wird dieses den Winkel B und die Basis AC halbiren (Zus. II.), und seine Verlängerung DE steht ebenfalls auf AC senkrecht (§. 10. Zus. IV.), geht durch die Spitze E des untern Dreieckes AEC (Zus. III.), und halbirt deßhalb auch den Winkel E; von B nach E ist aber nur eine gerade Linie möglich (§. 3. Zus. II.), folglich ist BE auf AC perpendikulär, und halbirt die Winkel an den Spitzen.

Anmerkung: Aus dem hier aufgestellten Lehrsatze geht hervor, daß (Fig. 30.) die gerade Linie BD, welche ver-

möge der im §. 27. angegebenen Verfahrungsweise die Linie AC halbirt, auf diese Linie senkrecht steht, und die Winkel B und D in zwei gleiche Theile theilet; woraus ebenfalls die Wahrheit des V. Zusatzes ersichtlich ist.

II. Abschnitt.

Von Parallellinien.

§. 37.

Erklärungen.

a) Wenn zwei gerade Linien in der nämlichen Ebene so liegen, daß sie verlängert auf einer Seite zusammen stoßen, so heissen sie nach dieser Seite hin konvergent oder zusammenfahrend, und nach der entgegengesetzten Seite hin divergent oder auseinanderfahrend; daher sind (Fig. 39.) die Linien LP und CD nach der Seite von P und D hin, wenn sie verlängert auf dieser Seite zusammen stoßen, konvergent, und auf der entgegengesetzten Seite von L und C divergent.

b) Liegen zwei gerade Linien in der nämlichen Ebene so, daß sie, wie immer verlängert, nie zusammen stoßen, und sich somit nie schneiden, so heissen sie gleichlaufende Linien oder Parallellinien, wie (Fig. 38.) die Linien AB und CD.

c) Um die parallele Lage zweier Linien auszudrücken, setze man zwischen sie das Zeichen (#); daher z. B. zeigt AB # CD an, daß AB mit CD parallel ist.

d) Werden in einer Ebene (Fig. 38.) zwei gerade Linien AB und CD von einer dritten geraden Linie EF geschnitten, so nennt man

α) die Winkel m und n wie auch p und r die beiden inneren Winkel auf einer Seite; dann

β) den Winkel q den äußeren, und n seinen inneren entgegengesetzten Winkel, und
γ) die Winkel n und p, wie auch r und m die beiden inneren Wechselwinkel.

Anmerkung: Wenn man nur sagt „die beiden inneren Winkel, und die beiden Wechselwinkel", so versteht man allemal die inneren auf einer Seite liegenden Winkel, und die inneren Wechselwinkel.

§. 38.

I. Lehrsatz:

Wenn zwei gerade Linien in einer Ebene von einer dritten geraden Linie so geschnitten werden, daß die beiden inneren Winkel zusammen 180 Grad haben, oder daß der äußere Winkel seinem inneren entgegengesetzten gleich ist, oder endlich daß die beiden Wechselwinkel einander gleich sind, so sind die Linien parallel.

Beweis:

1) Es seien AB und CD die beiden Linien (Fig. 38.), die durch EF so geschnitten werden, daß $m + n = 180^\circ = 2R$;

2) Haben diese zwei Winkel 180°, so halten die beiden anderen inneren Winkel auch 180°; denn

$$\left.\begin{array}{l} p + m = 180^\circ, \\ \text{dann } r + n = 180^\circ, \end{array}\right\} \text{(§. 11. Zus. II.)},$$

$$\text{also } p + m + r + n = 360^\circ \text{ (Arithm. I. §. 25. I.)},$$

$$\text{ferner } m + n = 180^\circ \text{ (per hyp.)},$$

$$\text{somit } p + r = 180^\circ = 2R \text{ (Arithm. I. §. 34. I.)}.$$

3) Es können also die Linien AB und CD wie immer verlängert, auf keiner Seite zusammen stoßen, weil sie sonst mit den durchschneidenden Linien EF ein Dreieck bilden würden, wo die beiden Winkel $m + n = 180^\circ$, oder $p + r = 180^\circ$, was nicht möglich ist (§. 28. Zus. II.), daher sind diese Linien parallel; das ist, wenn $m + n = 180^\circ$, so ist AB ‡ CD.

4) Werden die Linien so geschnitten, daß $q = n$, so ist $m + n = 180^\circ$;
dann $q + m = 180^\circ$ (Zus. II.),
dann $q = n$ (per hyp.),

also $m + n = 180^\circ = 2R$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.).

Wenn aber $m + n = 180^\circ$, so sind die Linien parallel, also ist auch AB # CD, wenn $q = n$.

5) Endlich sind auch die Linien parallel, wenn sie so geschnitten werden, daß $p = n$, weil dann wieder $m + n = 180^\circ$; denn
$p + m = 180^\circ$ (§. 11. Zus. II.),
dann $p = n$ (per hyp.),

also $m + n = 180^\circ$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.).

Das heißt, wenn $p = n$, so ist wieder AB # CD.

I. Zusatz: Wenn in einer Ebene (Fig. 42.) zwei gerade Linien EF und GH auf einer dritten CD senkrecht stehen, so sind sie parallel, weil dann $m = R$ und $n = R$ (§. 8. d.), und daher $m + n = 2R$, weßhalb EF # GH (Lehrs.);

II. Zusatz: Wenn in einer Ebene mehrere gerade Linien auf einer andern unter gleichen Winkeln aufstehen, so sind jene Linien unter sich parallel, weil sie dann allemal so durch eine gerade Linie geschnitten werden, daß der äußere und innere entgegengesetzte Winkel einander gleich sind (Lehrs.).

§. 39.

I. Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt in einer Ebene zu einer geraden Linie eine Parallele zu ziehen.

Auflösung:

1) Es soll (Fig. 38.) durch den Punkt G eine gerade Linie gezogen werden, die mit CD parallel ist.

2) Man ziehe von G zu einem beliebigen Punkte H die gerade Linie GH, und verlängere diese unbestimmt, etwa bis zu E;

3) An die Linie EG zeichne man dann den Win-

kel EGB, welcher den Punkt G zum Scheitel hat (§. 25.), und dem Winkel GHD gleich ist; oder

4) Man zeichne an die Linie GH auf der andern Seite den Winkel AGH mit dem Scheitel G;

5) Verlängert man nun den Schenkel BG gegen A, oder AG gegen B, so erhält man die Linie AB, welche mit CD parallel ist (§. 38. Nro. 4 und 5.).

Anmerkung: Mechanisch können auf dem Papier Parallellinien mittels des so genannten Parallellineals gezogen werden, indem dieses aus zwei mit einander verbundenen Regeln oder Linealen besteht, die in jeder beliebigen Lage gleich weit von einander entfernt sind.

§. 40.

II. Lehrsatz:

Wenn zwei gerade Linien in einer Ebene durch eine dritte gerade Linie so geschnitten werden, daß die beiden inneren Winkel zusammen kleiner als zwei rechte, oder kleiner als 180 Grad sind, so stoßen jene Linien verlängert in einem Punkte auf jener Seite zusammen, wo diese Winkel sind.

Beweis:

1) Man setze (Fig. 39.), die Linien LP und CD haben in der nämlichen Ebene eine solche Lage, daß, wenn sie durch EF geschnitten werden, die Winkel HGD + GHP < 2R sind;

2) Man zeichne an die Linie HE und den Scheitel H auf der Seite von P und D den Winkel EHB = HGD (§. 25.), so ist, wenn man den Schenkel BH gegen A hin verlängert, die Linie AB mit CD parallel (§. 38. Nro. 4.);

3) Die Winkel EHP und PHG sind Nebenwinkel (§. 8. a.), somit EHP + PHG = 2R (§. 8. Zus. III.). Weil PHG + HGD < 2R (per hyp.), so ist EHP + PHG > PHG + HGD (Arithm. I. §. 10. Nro. 6.), weßhalb, wenn man auf beiden Seiten

PHG wegläßt, EHP > HGD; ferner nach Nro. 2. ist AGD = EHB, also EHP > EHB, und die Linie HB liegt zwischen E und HP.

4) Der Winkel EHP ist dem Winkel GHL gleich (§. 10. Zus. III.), und eben so ist EHB = GHA; nun ist nach Nro. 3. der Winkel EHP > EHB, also auch GHL > GHA, und der Schenkel HA liegt zwischen HL und HG;

5) Die Winkel AHG und GHB sind Nebenwinkel, also AHG + GHB = 2R; dann ist nach Nro. 2. der Winkel EHB = HGD, und EHB = AHG (§. 10. Zus. III.), also HGD = AHG, und HGD + GHB = 2R; ferner ist HGD + GHP < 2R (per hyp.), weßhalb HGD + GHB > HGD + GHP, und GHB > GHP, woraus folgt, daß HP zwischen HG und HB liegt;

6) HGD + GHP < 2R (per hyp.), nach Nro. 5. ist HGD = AHG, also AHG + GHP < 2R, oder AHP < 2R, das ist, der Winkel AHP ist hohl (§. 9. b.);

7) Weil HP zwischen HB und HG liegt (Nro. 6.), und HA zwischen HL und HG ist, so liegt HG zwischen HA und HP, also zwischen den Schenkeln des hohlen Winkels HP, und somit der Punkt G innerhalb dieses Winkels;

8) Der Punkt G liegt in der Linie CD, da EF in diesem Punkte diese Linie schneidet; deßhalb schneidet die Linie CD beim hohlen Winkel AHP wenigstens einen Schenkel (§. 18. Zus. VI.); den Schenkel AH oder seine Verlängerung schneidet sie aber nicht, weil AH oder AB mit CD parallel ist (Nro. 2.), daher schneidet HP oder LP verlängert die Linie CD gegen die Seite P und D hin, weil auf dieser Seite der Schenkel HP liegt, und HP zwischen HG und HB ist.

Es schneiden sich also die Linien LP und CD verlängert in einem Punkte auf der Seite von P und D, wenn sie in einer Ebene liegen, und durch EF so geschnitten werden, daß HGD + GHP < 2R, oder daß HGD + GHP < 180 Grad.

I. Zusatz: Werden in einer Ebene zwei gerade Linien so geschnitten, daß die beiden inneren Winkel auf einer Seite mehr haben als 180°, oder daß sie größer sind als zwei rechte Winkel, so divergiren sie auf der Seite dieser Winkel, und stoßen verlängert auf der andern Seite in einem Punkte zusammen, sind also da konvergent.

Denn wenn (Fig. 39.) die Winkel $LHG + CGH > 2R$, so sind ihre Nebenwinkel zusammen, nämlich $PHG + HGD < 2R$, oder kleiner als 180 Grad, weil diese vier Winkel zusammen vier rechten gleich sind (§. 8. Zus. III.); sind aber $PHG + HGD < 2R$, so stoßen nach dem Lehrsatze die Linien auf dieser Seite zusammen, sind also da konvergent, und auf jener divergent, wenn $LHG + HGC > 2R$.

II. Zusatz: Wenn in einer Ebene (Fig. 39.) zwei gerade Linien LP und CD so von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, daß der äußere Winkel EHP größer ist, als der innere entgegengesetzte HGD, so schneiden sich die Linien in einem Punkte auf der Seite dieser Winkel; weil dann die inneren Winkel $PHG + HGD < 2R$, oder kleiner als 180 Grad sind; denn

$$
\begin{array}{ll}
 & EHP > HGD \text{ (per hyp.)}, \\
\text{dann} & GHP = GHP \\
\hline
\text{also} & EHP + GHP > HGD + GHP, \\
\text{dann} & EHP + PHG = 2R \text{ (§. 8. Zus. III.)}, \\
\hline
\text{mithin} & PHG + HGD < 2R.
\end{array}
$$

Um deßwillen sind jetzt wieder die Linien LP und CD gegen die Seite P und D hin konvergent, und auf der entgegengesetzten Seite gegen L und C hin divergent (§. 37. a.).

III. Zusatz: Werden (Fig. 39.) zwei gerade Linien LP und CD in einer Ebene durch eine gerade Linie EF so geschnitten, daß der äußere Winkel CGF kleiner ist, als der innere entgegengesetzte LHG, so stoßen sie verlängert auf der andern Seite gegen P und

D zusammen, sind also da konvergent, und auf der ersten Seite divergent.

Anmerkung: Euklides führt diesen Lehrsatz ohne Beweis als ein Axiom auf, und er ist unter seinen Grundsätzen das bekannte eilfte Axiom.

In verschiedenen mathematischen Werken findet man verschiedene Versuche, diesen Satz als ein Theorem aufzustellen, und dafür einen giltigen Beweis aufzufinden, weil man ohne denselben den Lehrsatz des nächsten §. nicht beweisen könnte, daß nämlich bei Parallellinien die beiden inneren Winkel zwei rechten gleich sind, oder 180 Grad halten.

Herr Hofprediger und Professor Schulz führt den Beweis des Lehrsatzes dieses §. aus den unendlichen Winkelflächen, unter denen er die Flächen versteht, die zwischen den unbestimmt großen Schenkeln der geradlinigten Winkel liegen.

Herr geistlicher Rath und Stadtpfarrer Professor Magold führt den Beweis dadurch, daß er (Fig. 39.) die Linien AB und LP unter den nämlichen Winkeln mit EF herabrückt, bis AB auf CD fällt, wo dann P unter CD liegt, und der Schenkel GD beim Herabrücken in einem Punkte durch LP geschnitten wird.

Herr Professor Dr. Kiesewetter hält in seinen Anfangsgründen der reinen Mathematik alle aufgefundenen Beweise für unzuläßig, und stellt für dieses Theorem, dessen Wahrheit nie bezweifelt wurde, anstatt eines strengen Beweises nur eine Erläuterung auf.

Herr Professor Klügel schrieb in Göttingen eine Disputation (conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio 1763), in der er mehrere Versuche, diesen Lehrsatz zu beweisen, einer Prüfung unterwirft.

Den Beweis, den ich so eben diesem Lehrsatze von Nro. 1 — 8. beifügte, führt auch Lorenz in seinem Grundrisse der Mathematik an. Er stützt sich darauf, daß man bei einem hohlen Winkel die Schenkel über einem Punkt, der innerhalb liegt, allemal so verlängern kann, daß sie mit einer dritten geraden Linie ein Dreieck bilden, in dem dieser Punkt liegt, wo dann jede gerade Linie, die durch diesen Punkt geht, wenigstens einen Schenkel eines jeden Dreieckswinkels berühren oder schneiden muß.

§. 41.

III. Lehrsatz:

Wenn zwei Parallellinien von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, so sind die beiden inneren Winkel auf einer Seite zusammen gleich zwei rechten Winkeln, oder gleich 180°, ferner ist der innere Winkel seinem äußeren entgegengesetzten gleich, und die inneren Wechselwinkel sind ebenfalls einander gleich.

Beweis:

1) Gesetzt, es werden (Fig. 38.) die Parallellinien AB und CD durch EF geschnitten;

2) Hätten die beiden inneren Winkel m und n nicht 180 Grad, so hätten sie mehr oder weniger als 180°; haben sie weniger als 180°, und ist somit $m + n < 2R$, so stoßen die Linien verlängert auf der Seite von B und D zusammen (§. 40.), was nicht möglich ist, weil sie nach der Voraussetzung parallel sind; haben die Winkel m und n mehr als 180°, so haben die Winkel p und r weniger als 180°, und die Linien AB und CD stoßen auf der Seite von A und C zusammen, was ebenfalls gegen die Annahme ist; denn

$$\left.\begin{array}{l} m + p = 180^\circ \\ \text{dann}\quad r + n = 180^\circ \end{array}\right\} \text{(§. 11. Zus. III.)},$$

$$\text{also}\quad m + p + r + n = 360^\circ,$$

$$\text{wäre nun}\quad m + n > 180^\circ,$$

$$\text{so wäre}\quad p + r < 180^\circ.$$

3) Es ist also $m + n = 180^\circ$, und aus den nämlichen Gründen $p + r = 180^\circ$; d. h., die beiden inneren Winkel auf einer Seite halten mit einander zwei rechte Winkel, wenn nämlich AB # CD, oder sind $= 180^\circ$;

4) Nach Nro. 3. ist $m + n = 2R$, dann sind q und m Nebenwinkel, also $q + m = 2R$, somit $m + n = q + m$, und $n = q$, d. h., wenn

AB # DC, so ist der innere Winkel n seinem äußeren entgegengesetzten Winkel q gleich.

5) Endlich ist nach Nro. 4. der Winkel n = q, dann q = p (§. 10. Zus. III.), also n = p, d. h., wenn AB # CD, so sind die inneren Wechselwinkel n und p, und aus den nämlichen Gründen r und m einander gleich.

I. Zusatz: Durch einen Punkt gibt es in einer Ebene mit einer geraden Linie nur eine Parallele.

Denn es sei (Fig. 39.) die Linie AB, in welcher der Punkt H liegt, mit CD parellel, und es sei auch die Linie LP, welche ebenfalls durch diesen Punkt geht, mit CD parallel; zieht man nun die Linie EF, welche AB und CD schneidet, so bildet LP auf der Seite von B mit EF einen Winkel PHG, der kleiner oder größer ist als BHG; so daß HGD + PHG allemal kleiner oder größer ist als 2R, weßhalb LP nicht auch mit CD parallel sein kann (§. 40.).

II. Zusatz: Wenn eine gerade Linie in einer Ebene die eine Parallele in einem Punkte schneidet, so schneidet sie verlängert auch die andere Parallellinie.

Denn (Fig. 39.) wenn AB # CD, und die gerade Linie LP die Parallele AB im Punkte H schneidet, so wäre sie, wenn sie nicht auch CD schneiden würde, mit CD parallel (§. 37. b.), und es gäbe durch H mit CD die beiden Parallelen AB und LP, was nicht möglich ist (Zus. I.); deßhalb muß LP verlängert auch die andere Parallele CD in einem Punkte schneiden.

III. Zusatz: Wenn zwei gerade Linien mit einer dritten Linie in der nämlichen Ebene parallel sind, so sind sie es auch unter sich.

Denn wenn (Fig. 40.) die Linie AB # CD, und CD # AB, so wird die gerade Linie GH, welche AB schneidet, auch CD schneiden, und deßhalb auch die Parallele EF (Zus. II.); ferner ist der Winkel m = n, und n = p, weil AB # CD, und CD # EF (per hyp. und Lehrs.); also ist m = p, und deßwegen auch AB # EF (§. 38.).

IV. Zusatz: Parallelen zwischen Parallelen sind

gleich lang; das ist (Fig. 41.), wenn BC # AD, und BA # CD, so ist BC = AD, und BA = CD.

Denn man ziehe die Diagonal AC (§. 12. f.), so ist der Winkel m = q, weil BC # AD, und n = p, weil AB # CD (Lehrs.), dann AC als gemeinschaftliche Seite ist = AC, also △ ABC ≌ △ BCD (§. 22.), und BC = AD, wie auch AB = CD (§. 18. Zus. IV.).

V. Zusatz: Zwischen zwei Parallelen sind alle Perpendikel unter sich parallel und gleich; das ist (Fig. 42.), wenn AB # CD, so ist EF $\#\!\!=$ GH.

Denn weil EF und GH Perpendikel sind, die von Punkten der obern Parallele auf die untere gezogen wurden, so ist der Winkel m = R, und n = R (§. 8. c und d.), also m + n = 2R, und EF # GH (§. 38.), daher auch EF = GH (Zus. IV.).

Aus diesem Grunde stehen auch zwei Parallelen in allen ihren Punkten gleich weit von einander ab, da die Entfernungen der Punkte von geraden Linien durch Perpendikel bestimmt werden (§. 33. Zus. II.).

VI. Zusatz: Wenn die Schenkel eines Winkels inner den Schenkeln eines andern Winkels in einer Ebene liegen, und mit diesen parallel sind, so sind die Winkel einander gleich; das ist (Fig. 43.), wenn die Winkel ABC und abc in der nämlichen Ebene liegen, und AB # ab, wie auch BC # bc, so ist ABC = abc.

Denn man ziehe durch die Scheitel dieser Winkel die gerade Linie FE, so ist m = x, weil AB # ab, und n = y, weil BC = bc (Lehrs.), also m + n = x + y, und somit ABC = abc.

VII. Zusatz: Wenn (Fig. 42.) von zwei Parallelen *AB* und *CD* die eine *AB* auf *EF* in einer Ebene senkrecht steht, so steht auch *CD* auf diese Linie *EF* senkrecht. Denn wenn *AB* auf *EF* senkrecht ist, so ist der Winkel *E* = *R* (§. 8. c und d.); ferner die Linie *EF*, da sie nach der Annahme in der nämlichen Ebene liegt, schneidet auch die Parallele *CD* (Zus. II.), daher ist E + m = 2R (Lehrs.),

und also m = R, weßhalb auch *CD* auf *EF* senkrecht steht (§. 9. Zus. IV.).

VIII. Zusatz: Wenn (Fig. 42.) die gerade Linie *EF* auf die eine Parallele *AB* senkrecht steht, so steht sie auch auf der andern *CD* senkrecht. Denn wenn *FE* auf *AB* senkrecht steht, so steht auch *AB* auf *EF* senkrecht, und deßhalb auch *EF* auf *CD* (Zus. VII.).

Anmerkung: In der Planimetrie wird gezeigt werden, daß (Zus. III.) zwei Linien unter sich parallel, wenn sie es mit einer dritten sind, und schon nicht alle drei Linien in der nämlichen Ebene liegen, gleichwie auch da bewiesen wird, daß (Zus. VI.) zwei Winkel einander gleich sind, wenn sie auch nicht in der nämlichen Ebene, und die Schenkel des einen Winkels mit den Schenkeln des andern parallel sind.

§. 42.

IV. Lehrsatz:

Wenn man auf den Schenkeln eines hohlen Winkels zwei Perpendikel errichtet, so stoßen sie verlängert allemal in einem Punkte zusammen, und zwar

a) beim rechten und stumpfen Winkel innerhalb der Schenkel, und

b) beim spitzigen Winkel in einem Punkte, der entweder innerhalb der Schenkel, oder in einem Schenkel, oder außerhalb der Schenkel dieses Winkels liegt.

Beweis von a.

1) Es sei (Fig. 44.) der Winkel *ABC* ein rechter oder ein stumpfer Winkel, und auf seine Schenkel seien die Perpendikel *EF* und *GH* errichtet;

2) Man verbinde die beiden Punkte *E* und *H*, in welchen die beiden Perpendikel die Schenkel berühren, durch die gerade Linie *EH*;

3) Weil *B* ein rechter oder stumpfer Winkel ist

(per hyp.), so sind m und n spitzige Winkel (§. 29. Zus.), also $m < R$, und $n < R$; ferner ist $BEF = R$, und $BHG = R$ (§. 8. c und d.), somit liegt EH zwischen den Winkeln BEF und BHG, weßhalb $p < BEF$, und $q < BHG$, und daher auch $p + q < BEF + BHG$, also $p + q < 2R$;

4) Es stoßen also die Linien EF und HG innerhalb des rechten oder stumpfen Winkels ABC zusammen (§. 40.).

Beweis von b.

1) Ist (Fig. 44.) der Winkel B spitzig, und bildet EH mit AB und BC zwei spitzige Winkel, so liegt EH zwischen den rechten Winkeln BEF und BHG, deßhalb ist $p + q < 2R$, und die Perpendikel EF und HG stoßen innerhalb des spitzigen Winkels zusammen (§. 40.);

2) Bildet (Fig. 45.) die Linie EH mit BC den rechten Winkel m, und steht somit EH auf BC senkrecht (§. 9. Zus. IV.), so fällt die Linie EH mit dem Perpendikel in eine gerade Linie zusammen (§. 32. Zus. II.), und das Perpendikel HG schneidet deßhalb verlängert das Perpendikel EF im Punkte E, welcher im Schenkel BA liegt;

3) Ist endlich (Fig. 46.), wenn man wieder die Linie HE zieht, der Winkel BHE stumpf, also größer, als der rechte Winkel BHG, so stoßt HG verlängert mit BA in F zusammen, da $B + n < 2R$ (per hyp.), und im rechtwinklichten Dreiecke BHF ist $m < R$ (§. 29. Zus.), und deßwegen sein Nebenwinkel $q > R$ (§. 9. Zus. V.); ferner ist $BEF = R$ (per hyp.), somit sein Nebenwinkel BEN auch $= R$ (§. 9. Zus. III.), und q oder $BqN > BEN$, weßwegen die Perpendikel HG und FE verlängert auf der Seite dieser Winkel zusammen stoßen (§. 40. Zus. II.), also in einem Punkte, der außerhalb der Schenkel des Winkels ABC liegt.

Es stoßen demnach zwei gerade Linien, die auf den Schenkeln eines hohlen Winkels senkrecht sind, allemal in einem Punkte zusammen.

§. 43.

V. Lehrsatz:

Die drei Winkel eines Dreieckes halten zusammen zwei rechte Winkel, oder 180 Grad.

Beweis:

1) Man verlängere (Fig. 47.) im Dreiecke ABC die Seite AC gegen D hin, und ziehe durch den Punkt C die Linie CE parallel mit AB, dann sind bei diesen Parallelen die Winkel n und B innere Wechselwinkel, und A ist der innere und p sein äußerer entgegengesetzter Winkel (§. 37. d.), also $n = B$, und $p = A$ (§. 41.);

2) Die drei Winkel $m + n + p = 2R$ (§. 8. Zus. V.) setzt man nun in dieser Gleichung anstatt n den gleichen Winkel B, und anstatt p den Winkel A, so ist $m + B + A = 2R$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.);

3) Die Winkel A, B und m oder C sind aber die Dreieckswinkel, also halten die drei Winkel eines Dreieckes zusammen 2R oder 180 Grad (§. 11. Zus. I.), das heißt, $A + B + C = 2R = 180$ Grad.

I. Zusatz: Wenn man die Summe zweier Winkel eines Dreieckes von 180 Grad subtrahirt, so erhält man allemal den dritten Dreieckswinkel, und wenn man einen Winkel von 180° subtrahirt, so hat man die Summe der übrigen; denn (Fig. 47.) nach dem Lehrsatze ist im Dreiecke ABC die Summe der drei Winkel gleich 180 Grad, also $A + B + C = 180°$, somit z. B. der Winkel $C = 180° - A - B$, und $A + B = 180° - C$ (Arithm. III. §. 96. Zus. I.), wie auch $C = 180° - (A + B)$, da man auch die Summe $A + B$ auf einmal von 180° subtrahiren kann, anstatt daß man jeden einzelnen Summanden subtrahirt (Arithm. III. §. 46. Lehrs. I.);

II. Zusatz: Wenn zwei Winkel eines Dreieckes den zwei Winkeln des andern Dreieckes gleich sind, so ist auch der dritte Winkel in dem einen Dreiecke dem dritten Winkel des andern gleich.

Denn wenn (Fig. 21 und 22.) der Winkel $A = a$, und $B = b$, so ist $A + B = a + b$ (Arithm. I. §. 25. I.); ferner $180^\circ = 180^\circ$, also $180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (a + b)$, da man auf diese Weise Gleiches von Gleichem subtrahirt (Arithm. I. §. 34. I.); dann ist nach dem I. Zusatze $C = 180^\circ - (A + B)$ und $c = 180^\circ - (a + b)$, somit $C = c$, das ist, auch der dritte Winkel des einen Dreieckes ist dem dritten Winkel des andern gleich.

III. Zusatz: Im gleichschenklichten Dreiecke ist durch einen Winkel jeder der beiden übrigen gegeben.

Ist (Fig. 20.) in einem solchen Dreiecke der Winkel an der Spitze (§. 18. d.) gegeben, somit B, so ist $A + C = 180^\circ - B$ (Zus. I.); ferner ist $A = C$, (§. 21. Zus. I.), also $A + C = 2A = 2C$, und deßhalb A oder $C = \frac{180^\circ - B}{2}$ (Arithm. III. §. 97. a.), das heißt, wenn man den Winkel an der Spitze von 180° abzieht, und den Rest mit 2 dividirt, so hat man jeden Winkel an der Grundlinie.

Ist hingegen ein Winkel an der Grundlinie gegeben, so ist auch der andere an der Basis, der ihm gleich ist, gegeben, somit findet man auch den Winkel an der Spitze, wenn man die Summe jener Winkel, oder das Duplum eines Winkels an der Grundlinie von 180° subtrahirt (Zus. I.).

IV. Zusatz: Im gleichseitigen Dreiecke ist jeder Winkel = 60 Grad; weil in einem solchen Dreiecke alle Winkel einander gleich sind (§. 21. Zus. II.), somit (Fig. 22.) der Winkel $A = B = C = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

V. Zusatz: Im rechtwinklichten Dreiecke betragen die zwei spitzigen Winkel, weil der rechte Winkel 90° hat (§. 11. Zus. I.), zusammen 90°; ist also einer davon gegeben, so erhält man den andern, wenn man den gegebenen spitzigen Winkel von 90° subtrahirt.

VI. Zusatz: Im Dreiecke ist der äußere Winkel den beiden inneren entgegengesetzten Winkeln zu-

sammen genommen gleich; das ist (Fig. 47.) der Win. $BCD = A + B$.

Denn $p = A$, und $n = B$, weil CE parallel mit AB ist, also $p + n = A + B$, oder $BCD = A + B$.

VII. Zusatz: Im gleichschenklichten Dreiecke ist der äußere Winkel an der Spitze doppelt so groß, als jeder Winkel an der Grundlinie.

Denn ist (Fig. 47.) das Dreieck ABC gleichschenklicht, und $AC = CB$, so ist der Winkel $A = B$ (§. 21. Zus. I.), also $A + B = 2A = 2B$; ferner ist $BCD = A + B$ (Zus. VI.) also $BCD = 2A = 2B$.

§. 44.

VI. Lehrsatz:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite und zwei Winkel gleich haben, von welchen einer dieser Seite anliegt, und der andere ihr gegenüber steht.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 21 und 22.) in den Dreiecken ABC und abc die Seite $AC = ac$, und der Winkel $A = a$, wie auch $B = b$;

2) Weil die Winkel A und B des einen Dreieckes den Winkeln a und b des andern Dreieckes gleich sind (per hyp.), so ist auch der dritte Winkel $C = c$ (§. 3. Zus. II.);

3) Man hat jetzt zwei Dreiecke, die eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich haben, folglich sind die Dreiecke kongruent (§. 22.); d. h., wenn $AC = ac$, $A = a$, und $B = b$, so ist $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

I. Zusatz: Durch eine Seite und zwei Winkel, von welchen einer der Seite anliegt, und der andere gegenüber steht, ist ein Dreieck vollkommen bestimmt, weil ein anderes Dreieck mit eben diesen Bestimmun-

gen damit kongruent ist, und es somit in dieser Voraussetzung nur ein einziges Dreieck dieser Art gibt (§. 6.).

II. Zusatz: Durch eine Seite und zwei Winkel ist ein Dreieck vollkommen bestimmt.

Denn sind in einem Dreiecke nebst einer Seite zwei Winkel gegeben, so können diese der gegebenen Seite anliegen, oder einer kann der Seite anliegen, und dann steht ihr der andere gegenüber; nun ist aber ein Dreieck durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (§. 22. Zus.), wie auch durch eine Seite, und einen anliegenden und den opponirten Winkel bestimmt (Zus. I.), also ist ein Dreieck durch eine Seite, und durch was immer für zwei Winkel vollkommen bestimmt.

§. 45.

II. Aufgabe, am Ende einer geraden Linie ein Perpendikel zu errichten.

Auflösung:

Man nehme (Fig. 48.) in der gegebenen geraden Linie AB einen beliebigen Punkt D an, und beschreibe, wenn das Perpendikel am Endspunkte A errichtet werden soll, über AD ein gleichschenklichtes Dreieck (§. 19. Zus. III.);

2) Man verlängere den Schenkel DC bis E, so daß EC = CD = AC ist, man erhält dadurch ein neues gleichschenklichtes Dreieck ACE;

3) Man ziehe von E nach A die Linie EA, so ist sie am Endspunkte A auf AB das verlangte Perpendikel.

Beweis:

1) Weil die Dreiecke ACD und ACE gleichschenklicht sind (ex constr.), so ist der Winkel $m = n$, und $p = q$ (§. 21. Zus. I.);

2) Im Dreiecke EAD sind die drei Winkel gleich zwei rechten (§. 43.), also $q + (p + m) + n$

= 180 Grad, wenn man nämlich anstatt des Winkels EAD die zwei Winkel p und m setzt, in die er durch AC gleich getheilt wird (Arithm. I. §. 10. Nro. 2), da C als Mittelpunkt zwischen E und D, also AC zwischen AE und AD liegt (§. 7. Anm. 4.);

4) Setzt man in der Gleichung $q + p + m + n = 180^\circ$ den Winkel p anstatt q, und m anstatt n, so ist $p + p + m + m = 180^\circ$, also $2p + 2m = 180^\circ$, und wenn man mit 2 dividirt (Arithm. I. §. 62. I.), so ist $p + m = 90^\circ$, mithin $EAD = 90^\circ$, und die Linie EA ist am Endspunkte A auf AB senkrecht (§. 9. Zus. IV.).

Anmerkung: Wie auf die Linie AB am Punkte A ein Perpendikel gezogen wird, wenn man BA gegen A ververlängert, ist im §. 32. gezeigt worden.

III. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Vierecken.

§. 46.

I. Lehrsatz:

Im Vierecke halten alle vier Winkel zusammen vier rechte Winkel, oder 360 Grade

Beweis:

a) Das Viereck (§. 13. a.) kann lauter hohle Winkel haben, oder

b) es kann in demselben auch ein erhabener Winkel vorkommen, und in beiden Fällen halten alle vier Winkel zusammen vier rechte, oder 360 Grad.

Beweis von a: 1) Wenn alle vier Winkel hohl sind, so ziehe man (Fig. 41.) von einem beliebigen Ecke etwa von A, zum opponirten Ecke C die Diagonallinie

nallinie AC, so wird das Viereck offenbar in die Dreiecke ABC und ADC getheilt;

2) Die drei Winkel eines Dreieckes halten mit einander zwei rechte Winkel, oder 180 Grad (§. 43.), mithin ist

$$p + B + m = 2R = 180^\circ,$$
und $$q + D + n = 2R = 180^\circ,$$
also $$p + q + B + D + m + n = 4R = 360^\circ,$$
nun ist $p + q = BAD = A$, und $m + n = BCD = C$,
folglich $A + B + C + D = 4R = 360$ Grad.

Beweis von b: 1) Man ziehe (Fig. 49.) vom erhabenen Winkel B zum gegenüber stehenden Ecke D die Diagonallinie BD, man erhält in diesem Falle die beiden Dreiecke ABD und BCD;

2) Die drei Winkel eines Dreieckes halten mit einander zwei rechte oder 180°, also alle Winkel dieser beiden Dreiecke zusammen vier rechte oder 360°; nun geben aber alle diese Winkel zusammen genau die vier Winkel des Viereckes, also ist wieder die Summe aller Winkel oder $A + B + C + D = 4R = 360^\circ$.

Es halten demnach die vier Winkel eines jeden Viereckes zusammen 4 rechte Winkel, oder 360 Grad.

Anmerkung: 1) Gegenwärtig beschränken sich die Untersuchungen immer auf Vierecke, und überhaupt auf Figuren von lauter hohlen Winkeln, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird.

2) Der Kürze wegen bezeichnet man das Viereck gewöhnlich nur durch zwei Buchstaben von zwei einander gegenüber stehenden Ecken, und setzt ihnen das Wort Viereck, oder auch das Zeichen (□) vor; daher (Fig. 41.) versteht man z. B. unter dem Ausdrucke „Viereck AC, oder □ AC" das Viereck ABCD.

§. 47.

II. Lehrsatz:

Ein Viereck ist vollkommen bestimmt,

a) durch zwei Seiten und die drei anliegenden Winkel; oder

b) durch drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel; oder
c) durch alle vier Seiten und einen Winkel, oder
d) durch alle Seiten nebst einer Diagonallinie.

Beweis von a:

1) Sind (Fig. 41.) im Vierecke AC die beiden Seiten AD und DC, und die drei anliegenden Winkel A, D und C gegeben, so sind, wenn die Diagonallinie AC gezogen wird, im Dreiecke ADC durch die gegebenen Seiten AD und CD und den eingeschlossenen Winkel D die übrigen zwei Winkel q und n sammt der dritten Seite AC gegeben (§. 20. Zus.);

2) Durch die beiden Winkel A und q ist der Winkel p, und durch die Winkel C und n ist der Winkel m bestimmt, indem $p = A - q$, und $m = C - n$;

3) Im zweiten Dreiecke ABC ist jetzt die Seite AC mit den beiden anliegenden Winkeln p und m gegeben; weßhalb das Dreieck selbst vollkommen bestimmt ist, und auch die Seiten AB und BC mit dem Winkel B gegeben sind (§. 22. Zus.).

Es sind also im Vierecke AC durch die zwei Seiten AD und DC und durch die drei anliegenden Winkel A, D und C auch die zwei übrigen Seiten AB und BC nebst dem Winkel B bestimmt, und das Viereck selbst ist durch die anfangs gegebenen Stücke vollkommen bestimmt, das heißt, unter dieser Bedingung gibt es nur ein einziges Viereck dieser Art, und jedes andere Viereck, das mit diesem Vierecke die gegebenen Stücke gleich hat, ist mit demselben kongruent (§. 6.), hat also damit die nämliche Quantität und Qualität (Arithm. I. §. 2. h.).

Beweis von b:

1) Sind (Fig. 41.) im Vierecke AC die drei Seiten AB, AD und DC, und die beiden eingeschlossenen Winkel A und D gegeben, und wird die

Diagonallinie AC gezogen, so ist das Dreieck ADC durch die Stücke AD, CD und D vollkommen bestimmt, und deßhalb auch in diesem Dreiecke die Seite AC mit den beiden Winkeln q und n gegeben (§. 20. Zus.);

2) Durch die beiden Winkel A und q ist der Winkel p bestimmt, und durch die Seiten AC und AB nebst dem Winkel p ist das Dreieck ABC bestimmt, daher ist es auch die Seite BC mit den beiden Winkeln B und m;

3) Die beiden Winkel m und n bestimmen den Winkel C, indem $m + n = C$.

Es ist also das Viereck durch drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel vollkommen bestimmt.

Beweis von c:

1) Sind im Vierecke AC alle vier Seiten und ein Winkel, etwa B, gegeben, und man zieht, damit B nicht getheilt wird, die Diagonallinie AC, so sind im Dreiecke ABC durch die drei gegebenen Stücke AB, BC und B die beiden übrigen Winkel p und m nebst der Seite AC bestimmt;

2) Im Dreiecke ACD sind jetzt alle drei Seiten gegeben, weßhalb das Dreieck selbst vollkommen bestimmt ist (§. 24.), und also auch die Winkel p, D und n bestimmt sind;

3) Die beiden Winkel p und q geben zur Summe den Winkel A, und m und n geben C; daher sind wieder alle Seiten und alle Winkel gegeben, und das Viereck ist durch alle vier Seiten und einen Winkel vollkommen bestimmt.

Beweis von d:

Sind endlich im Vierecke AC alle vier Seiten mit einer Diagonallinie bekannt, so sind in beiden Dreiecken alle drei Seiten bestimmt; dadurch sind es die Dreiecke selbst und ihre Winkel, und das Viereck ist unter der gesetzten Bedingung wieder vollkommen bestimmt.

Zusatz: Wenn daher in zwei Vierecken zwei Seiten mit den drei anliegenden Winkeln, oder drei Seiten mit den beiden eingeschlossenen Winkeln, oder alle vier Seiten mit einem Winkel, oder endlich alle Seiten mit einer Diagonallinie gleich sind, so sind allemal die übrigen drei gleichnamigen Stücke einander gleich, und die Vierecke kongruent.

§. 48.

Parallelogramm, Trapez und Trapezoid.

a) Ein Viereck, in welchem jedes Paar opponirter Seiten parallel ist, heißt ein Parallelogramm (Parallelogrammum); wie (Fig. 41.) das Viereck AC, wenn AD # BC und AB # CD.

b) Ein Viereck, in welchem nur ein Paar opponirter Seiten parallel ist, heißt ein Trapez (Trapezium); daher ist (Fig. 50.) das Viereck AC ein Trapez, wenn nur BC mit AD parallel ist.

c) Ein Viereck endlich (Fig. 51.), in welchem keine Seite mit der andern parallel ist, heißt ein Trapezoid (Trapezoides).

d) Beim Parallelogramm und beim Trapez heißt das Perpendikel zwischen den parallelen Seiten die Höhe dieser Figuren. Daher ist (Fig. 50.) das Perpendikel BE die Höhe des Trapezes AC.

I. Zusatz: Beim Parallelogramme und Trapez ist die Höhe immer gleich groß, man mag das Perpendikel aus was immer für einem Punkte der einen Parallellinie auf die andere ziehen (§. 41. Zus. V.).

II. Zusatz: Im Parallelogramme halten zwei Winkel, die an einer Seite anliegen, zusammen 180 Grad, oder sind zwei rechten Winkeln gleich. Denn (Fig. 54.) im Parallelogramme AC ist BC # AD, also $B + A = 180^\circ$, und $C + D = 180^\circ$; ferner BA # CD, also $A + D = 180^\circ$, und $B + C = 180^\circ = 2R$ (§. 41.).

III. Zusatz: Im Parallelogramme sind die opponirten Winkel einander gleich, das ist (Fig. 54.), der Winkel A ist $= C$, und $B = D$. Denn $A + B$

$= 180^\circ$, und $B + C = 180^\circ$ (Zus. I.), also ist $A = C$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 4. und §. 34. I.).

IV. Zusatz: Wenn im Parallelogramme ein Winkel ein rechter Winkel ist, so sind die übrigen drei auch rechte Winkel; ist hingegen ein Winkel desselben schief, so sind die übrigen drei Winkel auch schief, und jedes Parallelogramm hat deßhalb entweder lauter rechte, oder lauter schiefe Winkel.

Denn (Fig. 53.) wenn $A = R = 90^\circ$, so ist, weil nach dem II. Zusatze $A + B = 2R$, auch $B = R = 90^\circ$, und aus dem nämlichen Grunde $C = R$, und $D = R$, das ist, dann sind alle Winkel rechte Winkel.

Ferner (Fig. 54.) wenn $A < R$, so ist $B > R$, daher $C < R$, und $D > R$, das ist, wenn ein Winkel schief ist, so sind es auch die übrigen drei (Zus. II.).

V. Zusatz: Im Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten einander gleich. Denn (Fig. 41.) wenn das Viereck AC ein Parallelogramm ist, so ist $AD \# BC$ und $AB \# CD$, und deßhalb, weil Parallellinien zwischen Parallellinien einander gleich sind (§. 41. Zus. IV.), $AD = BC$ und $AB = CD$.

VI. Zusatz: Jede Diagonallinie theilet das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke. Denn (Fig. 41.) nach dem V. Zusatze ist

$$\left.\begin{array}{rl} & BC = AD \\ \text{und} & AB = CD \end{array}\right\} \text{(Zus. V.)},$$
$$\begin{array}{rl} \text{ferner} & AC = AC, \\ \hline \text{also ist} & \triangle ABC \cong \triangle ACD \text{ (§. 24.).} \end{array}$$

VII. Zusatz: Wenn in einem Vierecke (Fig. 41.) die gegenüberstehenden Seiten gleich sind, so sind sie auch parallel, und das Viereck ist ein Parallelogramm; das ist

wenn $AB = CD$, und $BC = AD$,
so ist $AB \# CD$, und $BC \# AD$.

Denn man ziehe die Diagonallinie AC, so ist nach §. 24. das Dreieck $ABC \cong \triangle ADC$, also $m = q$ und $p = n$ (§. 18. Zus. IV.), mithin $BC \# AD$ und $BA \# CD$ (§. 38.), und deßhalb ist das Vier-

eck AC in dieser Voraussetzung ein Parallelogramm (§. 48. a.).

VIII. Zusatz: Wenn in einem Vierecke zwei opponirte Seiten gleich und parallel sind, so sind auch die andern zwei entgegenstehenden Seiten gleich und parallel, und das Viereck ist ein Parallelogramm; das ist (Fig. 41.), wenn $AD \mathrel{\underline{\#}} BC$, so ist auch $AB \mathrel{\underline{\#}} CD$.

Denn da $AD \mathrel{\underline{\#}} BC$, so ist
$m = q$ (§. 41.),
ferner $BC = AD$ (per hyp.),
und $AC = AC$,

also $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (§. 20.);
mithin $AB = CD$ (§. 18. Zus. IV.), und $p = n$, folglich auch $AB \# CD$ (§. 38.), und das Viereck ist unter dieser Bedingung ein Parallelogramm.

Wenn man daher die Endspunkte zweier gleich langer Parallelen durch gerade Linien verbindet, so erhält man ein Parallelogramm.

IX. Zusatz: Im Trapez ist eine von den Parallelen kleiner, als die andere. Denn wäre sie gleich lang, so wäre das Viereck ein Parallelogramm (Zus. VIII.), und deßhalb kein Trapez (§. 48. b.).

X. Zusatz: Im Trapez sind die beiden Winkel, die an der größern Parallele anliegen, zusammen kleiner, als zwei rechte, und die an der kleinern Parallellinie anliegen, sind größer, als zwei rechte Winkel.

Denn (Fig. 55.) wenn man die kleinere Parallele BC mit der größern AD gleich lang macht, und von F nach D die gerade Linie DF zieht, so ist, weil $BF \mathrel{\underline{\#}} AD$, das Viereck AF ein Parallelogramm (Zus. VIII.), und deßhalb $BAD + ADF$ oder $A + m + n = 2R$ (Zus. II.); wird nun der Winkel n weggenommen, so ist $A + m < 2R$, und daher sind, weil alle vier Winkel eines Viereckes vier rechten gleich sind (§. 46.), die an der kleinern Parallele anliegenden Winkel $B + C > 2R$.

XI. Zusatz: Wenn man im Trapez die Seiten, welche nicht parallel sind, gegen die kleinere Parallele

hin verlängert, so stoßen sie auf dieser Seite in einem Punkte zusammen. Denn weil (Fig. 55.) nach dem vorigen Zusatze A + D oder A + m < 2R, so stoßen die Linien AB und DC, gegen BC hin verlängert, im Punkte E zusammen.

XII. Zusatz: Zieht man in einem Parallelogramme die beiden möglichen Diagonalen, so halbiren sie sich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte. Denn (Fig. 52.) zieht man im kleineren Parallelogramme ac die Diagonallinien ac und bd, so ist, weil im Parallelogramme die gegenüberstehenden Seiten parallel und gleich sind (§. 48. a. und Zus. V.), bc = ad, dann o = n, und m = p, also △ afd ≌ △ bfc, und deßhalb bf = fd und af = fc, das ist, die beiden Diagonalen theilen sich im gemeinschaftlichen Punkte f in zwei gleiche Theile.

Anmerkung: 1) Wenn sich zwei gerade Linien halbiren, und man verbindet ihre Endspunkte durch gerade Linien, so erhält man ein Parallelogramm, das ist (Fig. 52.), wenn af = fc und bf = fd, so ist das Viereck ac ein Parallelogramm; indem die Dreiecke afd und bfc wegen zweier gleichen Seiten und der gleichen Scheitelwinkel bei f kongruent sind, und also o = n und bc ⧣ ad, mithin auch ab ⧣ cd ist (Zus. VIII.).

2) Jede gerade Linie (Fig. 52.), welche durch den Durchschnittspunkt f der Diagonalen von was immer für einem Punkte des Umfanges zu einem andern gezogen wird, theilet wegen der Kongruenz der Dreiecke sowohl die Fläche, als auch sich selbst in zwei gleiche Theile; um deßwillen nennt man den Punkt f den Mittelpunkt der Größe des Parallelogramms.

§. 49.

Aufgabe, aus zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel ein Parallelogramm zu verzeichnen.

Auflösung:

1) Sind (Fig. 54.) für das Parallelogramm die Seiten AD und AB mit dem eingeschlossenen Win-

kel A gegeben, so verzeichne man an eine beliebige gerade Linie nach §. 25. den Winkel A, und trage auf den Schenkeln desselben die gegebenen Seiten AD und AB auf;

2) Aus B beschreibe man mit AD, und aus D mit AB Kreisbögen, und ziehe zum Durchschnittspunkte C die geraden Linien BC und DC, so ist das dadurch verzeichnete Viereck AC das verlangte Parallelogramm.

Beweis:

Auf diese Weise erhält man ein Viereck, in welchem die gegebenen Seiten AD und AB und der eingeschlossene Winkel A vorkommen, und die gegenüber stehenden Seiten einander gleich sind, nämlich BC = AD und DC = AB; weßhalb man das verlangte Parallelogramm verzeichnet hat (§. 48. Zus. VII.).

I. Zusatz: Durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ist ein Parallelogramm vollkommen bestimmt. Denn wenn (Fig. 54.) im Parallelogramme AC die beiden Seiten AB und AD, und der Winkel A gegeben sind, so sind dadurch die gegenüber stehenden Seiten BC und CD gegeben (§. 48. Zus. V.), und man hat ein Viereck, in welchem alle Seiten und ein Winkel gegeben sind, und das somit vollkommen bestimmt ist (§. 47. c.).

II. Zusatz: Aus diesem Grunde läßt sich aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel nur ein Parallelogramm verzeichnen, und jedes andere Parallelogramm, welches diese Stücke hat, ist damit kongruent.

Anmerkung: Aus den gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel läßt sich (Fig. 54.) das Parallelogramm auch dadurch verzeichnen, daß man durch B die Linie BC mit AD, und durch D die Linie DC mit AB parallel zieht (§. 39.); auf diese Weise schneiden sich die Linien BC und DC (§. 41. Zus. I.), und man erhält aus den gegebenen Stücken ebenfalls das verlangte Parallelogramm (§. 48. a.).

§. 50.

Quadrat, Rechteck, Rhombus und Rhomboid.

a) Ein Parallelogramm, in welchem alle Winkel rechte Winkel, und auch alle Seiten unter sich gleich sind, heißt ein **Quadrat** (Quadratum), wie (Fig. 52.) das kleinere Viereck ac und das größere *AC*.

b) Sind im Parallelogramme alle Winkel rechte Winkel, und die Seiten ungleich, so nennt man es ein **Rechteck** (Rectangulum), wie (Fig. 53.) das Viereck *AC*.

c) Sind die Winkel des Parallelogramms schief (§. 8. b.), und alle Seiten gleich, so heißt es eine **Raute** oder **Rhombus** (Rhombus), wie (Fig. 41.) das Viereck *AC*.

d) Sind endlich im Parallelogramme die Winkel schief und die Seiten ungleich, so wird es ein **Rhomboid** (Rhomboides) genannt, wie (Fig. 54.) das Viereck *AC*.

I. **Zusatz:** Im Quadrate, und im Rechtecke sind alle Winkel einander gleich, weil jeder ein rechter Winkel ist, und somit 90 Grad hält.

II. **Zusatz:** Das Quadrat ist ein reguläres Viereck, da in demselben alle Seiten, und alle Winkel einander gleich sind (§. 13. b.).

III. **Zusatz:** Das Quadrat ist durch eine Seite, das Rechteck durch zwei Seiten, die einen Winkel einschließen, der Rhombus durch einen Winkel und eine Seite, und das Rhomboid durch zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel vollkommen bestimmt (§. 47.).

IV. **Zusatz:** Weil ein Quadrat, z. B. das Quadrat *AC* (Fig. 52.) durch die Seite *AD*, und eben so das Quadrat ac durch die Seite ad vollkommen bestimmt ist, so kann man das ganze Quadrat *AC* durch AD^q, und eben so das Quadrat ac durch ad^q bezeichnen, so daß also die Ausdrücke AD^q, ad^q überhaupt Quadrate bezeichnen, die aus den Seiten *AD*, und ad konstruirt sind.

V. Zusatz: Wenn man zwei Linien gleich lang macht, und über jede ein Quadrat verzeichnet, so sind diese letztern ebenfalls einander gleich, das ist, wenn $AD = ad$, so ist $AD^q = ad^q$; da durch eine Seite das Quadrat vollkommen bestimmt ist (Zus. III.), und somit alle Quadrate von gleichen Seiten kongruent sind.

Anmerkung: Das Parallelogramm kann abgetheilt werden in das rechtwinklichte und schiefwinklichte Parallelogramm; das rechtwinklichte Parallelogramm mit lauter gleichen Seiten ist das Quadrat, und das mit ungleichen Seiten das Rechteck oder Oblong: das schiefwinklichte Parallelogramm von lauter gleichen Seiten heißt Rhombus, und das von ungleichen Seiten Rhomboid.

§. 51.

III. Lehrsatz:

Wenn von zwei Quadraten die Seite des erstern größer ist, als die Seite des andern, dann ist auch das erste Quadrat größer, als das andere.

Beweis:

1) Man lege (Fig. 52.) das Quadrat ac, welches nach der Voraussetzung die kleinere Seite ad hat, so auf das andere Quadrat AC, daß sich die gleichen Winkel a und A decken; es fällt dadurch ab auf AB und ad auf AD;

2) Da nun $ab < AB$, und eben so $ad < AD$, so fallen die Linien bc und dc innerhalb des Quadrates AC, das erstere Quadrat ac bedeckt also nur den Theil Ac vom Quadrate AC, weßhalb (Arithm. I. §. 10. Nro. 3.) auch $AD^q > ad^q$, das ist, die größere Seite gibt auch das größere Quadrat, und umgekehrt die kleinere Seite gibt das kleinere Quadrat.

I. Zusatz: Gleiche Quadrate haben gleiche Seiten, und sind kongruent, das ist, wenn $ad^q = AD^q$, so ist auch $ad = AD$, und $ad^q \cong AD^q$.

Denn wäre $ad > AD$, so wäre nach dem Lehrsatze $ad^q > AD^q$; und wäre $ad < AD$, so wäre $ad^q < AD^q$. Beides ist aber gegen die Voraussetzung, daher haben gleiche Quadrate gleiche Seiten, und sind kongruent (§. 50. Zus. V.).

II. Zusatz: Das größere Quadrat hat auch eine größere Seite, das ist, wenn $AD^q > ad^q$, so ist $AD > ad$.

Denn wäre $AD = ad$, so wäre $AD^q = ad^q$ (§. 50. Zus. III.), und wäre $AD < ad$, so wäre nach dem Lehrsatze $AD^q < ad^q$. Beides ist gegen die Voraussetzung, daher hat das größere Quadrat auch eine größere Seite, und umgekehrt das kleinere Quadrat hat eine kleinere Seite.

Anmerkung: 1) Soll man über eine gegebene Linie, z. B. (Fig. 52.) über AD, ein Quadrat verzeichnen, so errichtet man auf der nämlichen Seite an den beiden Endspunkten der Linie AD zwei Perpendikel (§. 45.), macht diese so lang wie AD, also $AB = AD$ und $DC = AD$, und verbindet ihre Endspunkte B und C durch die gerade Linie BC, und man hat das verlangte Quadrat AC, welches die gegebene Linie AD zur Seite hat (§. 48. Zus. VIII. und §. 50. a.).

Soll man überhaupt ohne eine gegebene Seite ein Quadrat verzeichnen, so zieht man (Fig. 52.) zwei beliebige gerade Linien ac und bd so, daß sie sich unter rechten Winkeln schneiden, also auf einander senkrecht stehen, nimmt auf derselben vom Durchschnittspunkte f aus die vier gleichen Theile fa, fc, fd und fb, und verbindet die Punkte a, b, c und d durch die geraden Linien ab, bc, cd und da und man erhält ein Quadrat ac. Denn weil bei f vier rechte Winkel sind, und $af = fc = fd = fb$, so sind die vier Dreiecke afd, afb, bfc und cfd unter sich kongruent, und deßhalb $ab = bc = cd = da$; das Viereck ac ist also ein Parallelogramm (§. 48. Zus. VII.), und zwar ein Quadrat, weil der Winkel $afd = dfc = 90°$, dann $p = n = 45°$, und $q = r = 45°$, mithin $p + q$ oder $adc = 90$ Grad (§. 48. Zus. IV.).

2) Soll man (Fig. 53.) über zwei ungleiche Seiten AB und AD ein Rechteck (§. 50. b.) verzeichnen, so

verzeichnet man einen rechten Winkel A, trägt auf den Schenkeln desselben die gegebenen Seiten AD und AB auf, und verfährt dann nach Vorschrift des §. 49.

3) Auf eine ähnliche Weise verfährt man, wenn man aus einem gegebenen Winkel, und einer gegebenen Seite nach der im §. 49. angegebenen Vorschrift einen Rhombus (§. 50. c.), oder aus zwei gegebenen Seiten nebst den eingeschlossenen Winkel eine Rhomboid (§. 50. d.) verzeichnen soll.

IV. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Vielecken.

---

§. 52.

Vielecke, dann gleichnamige und symmetrische, wie auch Vielecks- oder Polygons-Winkel.

a) Ein Vieleck (§. 13. a.) heißt ein Fünfeck (Pentagonum), Sechseck (Hexagonum) ꝛc., und überhaupt ein n Eck, je nachdem das Vieleck fünf, sechs ꝛc. oder überhaupt n Seiten zur Gränze hat.

b) Vielecke nennt man gleichnamig, wenn sie gleich viele Seiten oder Ecke haben.

c) Ein Vieleck heißt man symmetrisch, wenn es durch eine gerade Zahl von Seiten umgeben ist, derer jede zwei gegenüber stehende einander gleich und parallel sind.

d) Jeden Winkel an dem Umfange des Vielecks, den zwei Seiten desselben bilden, heißt man Vielecks- oder Polygons-Winkels (Angulus polygoni.).

e) Werden bei einem Vielecke die Schenkel der Winkel gegen den Scheitel hin verlängert, und fallen die Verlängerungen außerhalb der Figur, so nennt man diese Winkel auswärts gehende Winkel;

dagegen nennt man aber die Winkel einwärts gehend, wenn diese Verlängerungen in die Figur hineinfallen.

Sind alle Winkel eines Vielecks auswärtsgehend, so sagt man, man habe eine Figur mit lauter hohlen Winkeln (§. 9. b.), wie (Fig. 56.) das Siebeneck ABCDEFG; sind aber einige Winkel einwärts gehend, so hat man eine Figur, die nebst hohlen auch erhabene Winkel hat (§. 13. a.), wie (Fig. 58.), das angeführte Zwölfeck, wo die Winkel A, E, G und L einwärtsstehend oder erhaben sind.

I. Zusatz: In einem Vielecke von n Seiten, dessen Winkel sämmtlich hohl sind, kann man aus einem Ecke n — 3 Diagonallinien ziehen. Denn bei einem Vielecke von n Seiten oder Ecken kann man von einem Ecke zu den übrigen Ecken n — 1 gerade Linien ziehen; da nun alle diese Linien, außer der ersten und letzten Diagonalen sind, so gibt es n — 1 — 2 = n — 3 Diagonalen. Man kann z. B. (Fig. 56.) im Siebenecke ABCDEFG vom Ecke A zu den übrigen sechs Ecken sechs gerade Linien, nämlich AB, AC, AD, AE, AF und AG ziehen, von welchen die erste AB, und die letzte AG als Vielecksseiten keine Diagonallinien sind (§. 12. f.); daher ist im Siebenecke die Anzahl der Diagonallinien = 7 — 1 — 2 = 7 — 3 = 4, das heißt, es gibt bei einem Siebenecke 7 — 3, also 4 Diagonalen.

II. Zusatz: Das Vieleck von n Seiten, dessen Winkel sämmtlich hohl sind, läßt sich durch die Diagonalen aus einer Ecke in n — 2 Dreiecke theilen.

Denn das erste Paar Seiten gibt mit der ersten Diagonal ein Dreieck, jede folgende Seite gibt mit zwei Diagonalen wieder ein Dreieck, und nur beim letzten Dreiecke werden wieder zwei Seiten erfordert, mithin gibt es n — 2 Dreiecke bei einem Vielecke von n Seiten; um deßwillen ist (Fig. 56.) das Siebeneck durch die vom Ecke A aus gezogenen Diagonalen in 7 — 2, also in 5 Dreiecke getheilt.

III. Zusatz: Wenn in einem Vielecke nebst hohlen auch erhabene Winkel vorkommen, so kann man

es durch Diagonalen, die man von den erhabenen Winkeln aus zieht, in mehrere Theile zerlegen, welche lauter hohle Winkel enthalten; daher (Fig. 57.) ist das Vieleck, welches die erhabenen Winkel A, E, G und L hat, durch die Diagonalen AE und GL in die drei Figuren ABCDE, dann AEFGLM und LGHGK getheilt, welche nur hohle Winkel haben.

IV. Zusatz: Wird nun, um die erhabenen Winkel in hohle zu theilen, eine Diagonallinie gezogen, so wird dadurch das Vieleck in zwei Theile getheilt: sind dazu zwei Diagonalen, wie im angeführten Beispiele bei der Figur 57. erforderlich, so wird dadurch das Vieleck in drei Theile getheilt: und überhaupt durch m — 1 solche Diagonalen wird das Vieleck in m Figuren getheilt, welche nur hohle Winkel enthalten.

V. Zusatz: Die Gränzen einer jeden einzelnen Figur bestehen jetzt aus den gezogenen Diagonalen, und den Seiten des Vieleckes.

Die erste Diagonal AE (Fig. 57.) und die Vielecksseiten AB, BC, CD und DE bilden den Umfang des ersten Theiles; — zur Gränze des zweiten Theiles gehören nebst den Seiten EF, FG, AM und LM die Diagonalen AE und GL; — ferner erhellet, daß eben so bei jedem folgenden Theile zum Umfange, wenn das Vieleck in mehr als drei Theile getheilt wird, nebst einer gewissen Anzahl von Polygons-Seiten noch zwei Diagonalen gehören; — bei dem letzten Theile aber bilden die Polygons-Seiten GH, HJ, JK und KL mit der Diagonal GL die Gränze desselben.

Kommen also auf den ersten Theil p, auf den zweiten q, auf den dritten r u. s. w., und endlich auf den letzten Theil w Seiten des Polygons, so daß also $p + q + r + \ldots + w = n$, das ist, der Anzahl aller Seiten des gegebenen Vieleckes gleich ist, so besteht der Umfang mit Einschluß der Diagonalen bei dem ersten Theile aus $p + 1$, bei dem zweiten Theile aus $q + 2$, bei dem dritten Theile aus $r + 2$

u. s. w., und bei dem letzten Theile aus $w + 1$ Seiten und Diagonallinien.

VI. Zusatz: In einem Vierecke von n Seiten kann man, wenn es nebst hohlen auch erhabene Winkel enthält, ebenfalls $n - 3$ Diagonalen ziehen, wie bei Figuren mit lauter hohlen Winkeln (Zus. I.).

Denn man kann durch Diagonalen die erhabenen Winkel in hohle, und dadurch das Vieleck in mehrere Theile zerlegen, welche nur hohle Winkel enthalten (Zus. III.); sind nun $m - 1$ solche Diagonalen erforderlich, so bekömmt man m Figuren mit lauter hohlen Winkeln (Zus. IV.).

Nebst den schon bei der Abtheilung des Polygons gezogenen $m - 1$ Diagonalen lassen sich noch nach dem I. Zusatze folgende neue Diagonalen ziehen:
bei dem ersten Theile $p + 1 - 3 = p - 2$,
bei dem zweiten Theile $q + 2 - 3 = q - 1$,
bei dem dritten Theile $r + 2 - 3 = r - 1$ u. s. w.,
bei dem letzten Theile $w + 1 - 3 = w - 2$.

Addirt man die neuen Diagonalen, so ist ihre Summe nach dem V. Zusatze $= p + q + r + \ldots + w = n$, davon abgezogen $m + 2$, das ist, die Zahl, die um 2 größer ist, als die Anzahl der vorhandenen Theile; weil für jeden mittlern Theil 1, und für den ersten und letzten Theil 2, also, da m die Anzahl aller Theile bezeichnet, die Zahl $m + 2$ abgezogen werden; deßhalb ist die Anzahl der neuen Diagonalen, die nach der Abtheilung noch gezogen werden können, gleich $n - (m + 2) = n - m - 2$ (Arithm. III. §. 49.).

Addirt man endlich die anfangs zur Abtheilung gezogenen Diagonalen $m - 1$ dazu, so ist die ganze Anzahl aller möglichen Diagonalen $= n - m - 2 + m - 1 = n - 3$ (Arithm. III. §. 47.), das ist, auch bei Vielecken mit erhabenen Winkeln lassen sich so viele Diagonalen ziehen, als Seiten da sind, weniger drei.

VII. Zusatz: Ein Vieleck von n Seiten, wenn es nebst hohlen auch erhabene Winkel enthält, läßt sich, wie ein Vieleck mit lauter hohlen Winkeln (Zus. II.), durch Diagonalen in $n - 2$ Dreiecke theilen.

Denn man theile die erhabenen Winkel durch Diagonalen in hohle, und dadurch das Vieleck in mehrere Theile mit lauter hohlen Winkeln, so kann man nach dem II. Zusatze

den ersten Theil in $p + 1 - 2 = p - 1$,
den zweiten Theil in $q + 2 - 2 = q$,
den dritten Theil in $r + 2 - 2 = r$ u. s. w., und
den letzten Theil in $w + 1 - 2 = w - 1$ Dreiecke zerlegen.

Daher ist auch bei einem solchen Vielecke die Summe aller Dreiecke $= p + q + r + \ldots + w - 2 = n - 2$, das ist, man bekömmt so viele Dreiecke, als Seiten da sind, weniger zwei.

Hat man nun z. B. ein Vieleck, das durch zwölf Seiten begränzt ist, so kann man dabei $12 - 3 = 9$ Diagonalen ziehen, und dadurch das Polygon in $12 - 2 = 10$ Dreiecke theilen, dasselbe mag nur hohle Winkel oder, wie Figur 57, nebst hohlen auch erhabene Winkel haben.

§. 53.

I. Lehrsatz:

Im Vielecke von n Seiten ist die Summe aller Polygons-Winkel gleich 180 Grad, multiplizirt durch die um 2 verminderte Anzahl der Seiten, d. h.,

$$S = 180^\circ (n - 2) = n \cdot 180^\circ - 360^\circ.$$

Beweis:

1) Das Vieleck mag nur hohle, oder nebst hohlen auch erhabene Winkel haben, so kann man es immer durch Diagonalen in $n - 2$ Dreiecke theilen (Zus. II. und VII.);

2) Die drei Winkel eines Dreieckes haben zusammen 180 Grad, also die Winkel von $n - 2$ Dreiecken haben zusammen $(n - 2)$ mal 180 Grad, oder $180^\circ (n - 2)$;

3) Alle Dreieckswinkel zusammen geben die Vieleckswinkel;

winkels; mithin ist bei einem Vielecke die Summe aller Polygons-Winkel gleich 180 Grad, multiplizirt durch die um 2 verminderte Anzahl von Seiten; d. h.,

$$S = 180^\circ (n - 2) = n . 180^\circ - 360^\circ.$$

Daher ist z. B. beim Siebenecke (Fig. 56.) die Summe aller Vierecks winkel oder $S = 180^\circ (7 - 2) = 180^\circ \times 5 = 900^\circ$; und beim Zwölfecke (Fig. 57.) ist die Summe aller Winkel oder $S = 180^\circ (12 - 2) = 180^\circ \times 10 = 1800^\circ$.

Zusatz: Im regulären Vielecke von n Seiten ist der Polygons-Winkel gleich dem Reste, den man erhält, wenn man von 180 Grad den nten Theil von 360 Grad subtrahirt; d. h., er ist $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

Denn nach dem Lehrsatze ist die Summe aller Winkel, oder

$$S = n . 180^\circ - 360^\circ,$$

dann $n = n$,

also $\frac{1}{n} S = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ (Arithm. III. §. 53. Lehrs. III.).

Der nte Theil von S, oder $\frac{1}{n} S$ ist aber der Polygons-Winkel des regulären Vieleckes, weil bei diesem alle Winkel einander gleich sind (§. 13. b.).

Daher ist z. B. im regulären Fünfecke der Polygonswinkel $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$; dann im regulären Sechsecke ist der Polygonswinkel $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Anmerkung: Bei einem Vielecke mit lauter hohlen Winkeln kann man auch zum Beweise des aufgestellten Lehrsatzes von einem innerhalb liegenden Punkte an alle Ecke gerade Linien ziehen; man bekömmt dadurch so viele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat, mithin n Dreiecke, derer Winkel zusammen n . 180° betragen (§. 43.). Alle Winkel um den in der Figur angenommenen Punkt haben zusammen 360 Grad (§. 8. Zus. VI.), und müs-

sen abgezogen werden, weil sie zu den Vieleckswinkeln nicht gehören. Daher ist jetzt wieder die Summe aller Vieleckswinkel oder $S = n \cdot 180^\circ - 360^\circ = 180^\circ (n - 2)$.

§. 54.

II. Lehrsatz:

Ein Vieleck ist vollkommen bestimmt,

a) Wenn außer zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, oder

b) Außer einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, oder

c) Außer drei auf einander folgenden Winkeln alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind, oder auch

d) Wenn alle Seiten und Diagonalen gegeben sind.

Beweis von a:

1) Sind (Fig. 56.) im Vielecke ABCDEFG alle Seiten und Winkel außer den Seiten AG und GF und dem eingeschlossenen Winkel G gegeben, so sind, wenn man durch die Diagonalen vom Ecke A aus die Figur in Dreiecke theilt, im Dreiecke ABC durch die gegebenen Seiten AB und BC und den eingeschlossenen Winkel C die übrigen zwei Winkel h und u sammt der dritten Seite AC gegeben (§. 20. Zus.);

2) Aus dem nämlichen Grunde sind auch die folgenden Dreiecke ACD, ADE und AEF bestimmt;

3) Beim letzten Dreiecke AFG ist der Winkel n durch die Winkel F und o, und der Winkel m durch den Winkel A und die Winkel h, i, k und l bestimmt, weßhalb das Dreieck AGF selbst, und somit auch die Stücke AG, GF und G vollkommen bestimmt sind.

Beweis von b:

1) Sind (Fig. 56.) im Vielecke alle Seiten und alle Winkel außer der Seite AG und den beiden an-

liegenden Winkeln A und G gegeben, so sind, wenn man durch Diagonalen die Figur auf die vorige Weise in Dreiecke theilt, im Dreiecke ABC durch die Seiten AB und BC und den eingeschlossenen Winkel B die Stücke AC, dann h und u bestimmt (§. 20. Zus.);

2) Eben so sind auch die mittleren Dreiecke ACD, ADE und AEF bestimmt;

3) Im letzten Dreiecke AGF sind die Seiten AF und FG bestimmt, und der Winkel n ist es durch die Winkel F und o, weßhalb auch das Dreieck AFG, und die Seite AG mit den Winkeln m und G bestimmt ist;

4) Es ist aber $h + i + k + l + m = A$; daher sind im Vielecke durch die gegebenen Seiten auch die Winkel A und G gegeben, und das Vieleck ist vollkommen bestimmt.

Beweis von c:

1) Sind im vorigen Vielecke alle Seiten und alle Winkel außer den drei auf einander folgenden Winkeln A, G und F gegeben, und man zieht von A aus zu den übrigen Ecken die Diagonalen, so sind aus den vorhin angeführten Gründen die Dreiecke ABC, ACD, ADE und AEF vollkommen bestimmt;

2) Das letzte Dreieck AFG ist durch die Diagonal AF und die gegebenen Seiten AG und GF bestimmt, und deßhalb sind es auch die drei Winkel m, G und n;

3) Die Winkel h, i, k, l, und m geben zur Summe den Winkel A, und o und n geben den Winkel F, das ist, $h + i + k + l + m = A$, und $o + n = F$.

Es sind also auch durch die gegebenen Stücke die drei Winkel A, G und F gegeben, und das Vieleck ist wieder vollkommen bestimmt.

Beweis von d:

1) Sind endlich alle Seiten und alle Diagonalen gegeben (Fig. 56. und 57.), so hat man Dreiecke, wo allemal alle drei Seiten gegeben sind; um deßwil-

len sind auch alle ihre Winkel gegeben, und die Dreiecke selbst vollkommen bestimmt (§. 24. Zus.);

2) Die Dreieckswinkel geben zusammen genau die Winkel des Vielecks.

Daher sind durch alle Seiten und Diagonalen alle Winkel des Vielecks bestimmt, und das Vieleck selbst ist dadurch vollkommen bestimmt.

I. Zusatz: Wenn demnach bei zwei gleichnamigen Vielecken bekannt ist, daß alle gleichnamigen Winkel und Seiten (§. 13. d.) außer zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, oder außer einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, oder außer drei auf einander folgenden Winkeln gleich sind, oder wenn alle Seiten und Diagonalen einander gleich sind, so sind die Vielecke kongruent.

II. Zusatz: Zwei gleichnamige reguläre Figuren (§. 13. b.), die eine Seite gleich haben, sind kongruent; weil sie dann auch alle übrigen Seiten, und zugleich alle Winkel gleich haben (§. 53. Zus.).

Anmerkung: Wie aus den gegebenen Stücken sowohl bei Dreiecken, als auch bei Vierecken und bei Vielecken überhaupt die unbekannten Stücke durch Rechnung gefunden werden können, wird in den folgenden Theilen dieses Lehrbuches in der Trigonometrie und Polygonometrie gezeigt werden. Die hier aufgestellten Lehrsätze geben für jetzt nur die Bedingungen an, unter denen die geradlinigten Figuren gegeben, und vollkommen bestimmt sind (§. 6.).

V. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Betreff des Kreises, und vom Maaße der Winkel.

---

§. 55.

I. Lehrsatz:

Eine gerade Linie kann die Kreislinie nur in zwei Punkten schneiden.

Beweis:

1) Man nehme in der um G beschriebenen Kreislinie die zwei Punkte C und D an, und ziehe durch sie die gerade Linie AB;

2) Würde die gerade Linie AB die Kreislinien nebst den Punkten C und D noch in einem dritten Punkte schneiden, so müßte dieser zwischen C und D, wie E, oder außer denselben wie F, liegen;

3) Man ziehe nun vom Zentrum des Kreises die geraden Linien GE und GF, und die Halbmesser GC und GD, so ist, weil das Dreieck CGD gleichschenklicht ist (§. 14. Zus. IV.), der Winkel m = p (§. 21. Zus. I.); ferner der äußere Winkel o ist größer als p (§. 28. Zus. I.), also ist auch o > m (Arithm. I. §. 10. Nro. 5.); und daher GC > GE (§. 30. Zus. I.), weßhalb die Linie GE kein Halbmesser des Kreises ist, und der Punkt E innerhalb des Kreises liegt;

4) Weil der Winkel m spitzig ist (§. 28. Zus. V.), so ist sein Nebenwinkel n stumpf (§. 9. Zus. V.), und das Dreieck GCF ist stumpfwinklicht, weßhalb da die Seite GF größer als der Radius GC ist (§. 30. Zus. IV.), und der Punkt F außerhalb des Kreises liegt.

Es schneidet also die gerade Linie AB die Kreislinie nur in den zwei Punkten C und D.

§. 56.

II. Lehrsatz:

Das Perpendikel, welches vom Mittelpunkte des Kreises auf eine Sehne gezogem wird, theilet die Sehne in zwei gleiche Theile.

Beweis:

1) Zieht man (Fig. 59.) in dem um C beschriebenen Kreise vom Zentrum auf die Sehne AB das Perpendikel CD, und die Radien AC und CB, so ist das Dreieck ACB gleichschenklicht (§. 14. Zus. IV.);

2) Wird im gleichschenklichten Dreiecke von der Spitze ein Perpendikel auf die Basis gezogen, so wird diese halbirt (§. 36. Zus. II.).

Daher theilet ein Perpendikel aus des Kreises Mittelpunkt die Sehne in zwei gleiche Theile.

I. Zusatz: Wenn man durch eine gerade Linie vom Mittelpunkte des Kreises aus die Sehne halbirt, so steht diese auf der Sehne senkrecht. Denn (Fig. 59.) das Dreieck ACB ist gleichschenklicht, und die gerade Linie CD, welche vom Scheitel C aus die Basis AB halbirt, steht auf AB senkrecht (§. 36.); daher die gerade Linie, welche vom Mittelpunkte der Sehne zum Zentrum des Kreises gezogen wird, allemal auf die Sehne senkrecht steht.

II. Zusatz: Die senkrechte Linie, welche die Sehne halbirt, geht durch den Mittelpunkt des Kreises. Denn (Fig. 59.) läge das Zentrum C nicht im Perpendikel DF, welches vom Mittelpunkte der Sehne auf sie gezogen wird, so würde das von C auf AB gezogene Perpendikel auf den Mittelpunkt der Sehne fallen (Lehrs.), und es gäbe in der nämlichen Ebene vom nämlichen Punkte D auf AB zwei verschiedene Perpendikel, was nicht möglich ist (§. 32. Zus. II.)

III. Zusatz: Der Radius, welcher auf die Sehne perpendikulär gezogen wird, halbirt die Sehne (Lehrs.), und umgekehrt der Halbmesser des Kreises, welcher die Sehne in zwei gleiche Theile theilet, steht auf dieselbe senkrecht (Zus. I.).

IV. Zusatz: Vom Mittelpunkte des Kreises kann auf eine Sehne nur ein einziges Perpendikel gezogen werden (§. 33. Zus. I.), und dieses ist unter allen Linien, die vom Zentrum auf die Sehne möglich sind, die kürzeste Linie (§. 33. Zus. II.); daher bestimmt dieses Perpendikel die Entfernung oder den Abstand der Sehne vom Zentrum.

§. 57.

I. Aufgabe, zu einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu suchen.

Auflösung:

1) Man nehme (Fig. 60.) in der Peripherie des um C beschriebenen Kreises drei beliebige Punkte A, B und D an, und ziehe die Sehnen AB und BD;

2) Man errichte durch die Mittelpunkte dieser beiden Sehnen zwei Perpendikel, die sich in einem Punkte durchschneiden, welcher das gesuchte Zentrum des Kreises ist.

Beweis:

1) Die auf diese Weise gezogenen Perpendikel schneiden sich allemal in einem Punkte (§. 42.);

2) Der Mittelpunkt des Kreises liegt in beiden Perpendikeln (§. 56. Zus. II.), die nur den einzigen Punkt C gemein haben (§. 3. Zus. IV.); deßhalb ist der Durchschnittspunkt C das gesuchte Zentrum des Kreises.

§. 58.

II. Aufgabe, einen Kreis zu verzeichnen, dessen Peripherie durch drei gegebene Punkte geht, die nicht in einer einzigen geraden Linie liegen.

Auflösung:

1) Sind (Fig. 60.) die drei Punkte A, B und D gegeben, die nicht in einer geraden Linie liegen,

und man soll durch sie eine Kreislinie beschreiben, so verbinde man diese Punkte durch die geraden Linien AB und BD,

2) Man theile jede dieser Linien durch ein Perpendikel in zwei gleiche Theile (§. 27. Zus. I.), so werden sich diese Perpendikel in einem Punkte C durchschneiden;

3) Man ziehe nun aus C mit dem Halbmesser CA, der die Entfernung des Durchschnittspunktes C von einem der gegebenen Punkte ausdrückt, in der Ebene dieser drei Punkte eine Kreislinie, so geht diese durch die drei gegebenen Punkte.

Beweis:

1) Zieht man vom Durchschnittspunkte C zu den drei gegebenen Punkten die geraden Linien CA, CB und CD, so ist

$AE = EB$,	ferner $BH = HD$,	
$m = n = 90°$,	$o = p = 90°$,	Nro. 2.
und $EC = EC$,	und $CH = CH$,	
also $\triangle AEC \cong \triangle EBC$,	also $\triangle BCH \cong \triangle CHD$ (§. 20.),	
somit $CA = CB$;	mithin $CB = CD$ (§. 18. Zus. IV.);	

2) Es ist also $CA = CB = CD$; und die Kreislinie, welche auf die angezeigte Weise mit dem Halbmesser CA gezogen wird, geht durch die drei gegebenen Punkte A, B und D.

I. Zusatz: Durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, ist die Kreislinie und der Kreis vollkommen bestimmt. Denn durch diese drei Punkte ist die Lage des Mittelpunktes C, und die Größe des Radius CA gegeben, und daher die Kreislinie und der Kreis selbst vollkommen bestimmt (§. 15.).

II. Zusatz: Zwei Kreislinien können einander nur in zwei Punkten schneiden. Denn hätten die Peripherien noch einen dritten Punkt gemein, so wären dieselben nicht zwei verschiedene Kreislinien, sondern nur eine Kreislinie (Zus. I.).

§. 59.

Zentri-Winkel und Peripherie-Winkel, dann Ausschnitt und Abschnitt des Kreises.

a) Ein Winkel, den zwei Radien im Mittelpunkte des Kreises bilden, heißt ein Zentriwinkel (Angulus centri).

b) Ein Winkel zweier Sehnen, dessen Scheitel in der Peripherie des Kreises liegt, heißt ein Peripheriewinkel (Angulus peripheriae).

c) Der zwischen zwei Radien und ihrem Bogen enthaltene Theil der Kreisebene heißt ein Ausschnitt (Sector), und

d) Der zwischen der Sehne und ihrem Bogen eingeschlossene Theil heißt ein Abschnitt des Kreises (Segmentum circuli).

Daher ist (Fig. 61.) der Winkel ACB ein Zentriwinkel, und (Fig. 62.) der Winkel abf ist ein Peripheriewinkel; ferner (Fig. 61.) das Flächenstück ACBD ist ein Ausschnitt, und das Stück ADB des um C beschriebenen Kreises ist ein Abschnitt oder Segment.

§. 60.

III. Lehrsatz:

In zwei Kreisen von gleichen Halbmessern gehören zu gleichen Zentriwinkeln gleiche Sehnen, gleiche Bögen, und kongruente Ausschnitte und Abschnitte.

Beweis:

1) Wenn (Fig. 61. u. 62.) in den beiden um C und c beschriebenen Kreisen die Halbmesser gleich sind, mithin AC = ac und BC = bc, so ist, da nach der Annahme der Winkel *ACB* = acb, das Dreieck *ACB* mit dem Dreiecke acb kongruent (§. 20.);

2) Daher ist die Seite *AB* = ab (§. 18. Zus. IV.), das ist, zu gleichen Zentriwinkeln gehören gleiche Sehnen.

3) Man lege die beiden Ausschnitte ACDB und acdb so auf einander, daß *AC* auf ac fällt und sich die kongruenten Dreiecke *ACB* und acb genau decken, so fällt CB längs cb, und der Punkt B auf b, und jeder Punkt des Bogens *ADB* auf einen Punkt des Bogens adb, weil sonst gegen die Voraussetzung die Radien der Kreise verschieden wären.

Es decken sich also auch die Bögen, Ausschnitte und Abschnitte, und sind daher, wie die Sehnen, kongruent.

I. Zusatz: Im nämlichen Kreise gehören zu gleichen Zentriwinkeln gleiche Sehnen, gleiche Bögen und kongruente Ausschnitte und Abschnitte. Denn (Fig. 61.) wenn der Zentriwinkel *ACB* = GCF, so ist, weil im nämlichen Kreise die Radien *AC* und GC, dann CB und CF einander gleich sind, das Dreieck *ACB* mit GCF kongruent, und deßhalb die Sehne *AB* = GF; legt man ferner die Kreisausschnitte *ACBD* und GCFK so auf einandee, daß sich die kongruenten Dreiecke *ACB* und GCF genau decken, so decken sich auch wegen der Gleichheit der Radien die Bögen *ADB* und GKF, dann die Ausschnitte *ACBD* und GCFK, und die Abschnitte *ADB* und GKF, und sind daher kongruent.

II. Zusatz: Durch den gegebenen Zentriwinkel eines bestimmten Kreises ist die Sehne, der Bogen, der Ausschnitt und der Abschnitt dieses Winkels vollkommen bestimmt. Denn (Fig. 61.) durch den Zentriwinkel *ACB* ist die Lage der Punkte *A* und B, und dadurch die Sehne *AB* bestimmt; nun ist ferner außer dem Bogen *ADB* zwischen *A* und B wegen der Gleichheit der Radien des Kreises kein anderer Kreisbogen mehr möglich, somit ist der Bogen *ADB*, und deßhalb auch der Ausschnitt *ACBD*, und der Abschnitt *ADB* des Zentriwinkels gegeben.

III. Zusatz: In einem Kreise, oder in verschiedenen Kreisen von gleichen Halbmessern gehören zu gleichen Sehnen gleiche Zentriwinkel, gleiche Bögen,

und kongruente Ausschnitte und Abschnitte. Denn (Fig. 61. und 62.) wenn $AB = GF = ab$, so ist $\triangle ACB \cong \triangle GCF \cong \triangle acb$ (§. 24.); woraus vermöge des Lehrsatzes und des I. Zusatzes das Uebrige folgt.

IV. Zusatz: Eine gerade Linie, welche den Zentriwinkel halbirt, halbirt auch die Sehne, den Bogen, den Ausschnitt und den Abschnitt. Denn (Fig. 62.) die gerade Linie cd, welche den Zentriwinkel halbirt, halbirt auch die Sehne und steht darauf senkrecht (§. 36. Zus. I.), und daraus folgt kraft des I. Zusatzes, daß die gerade Linie cd auch den Bogen, den Ausschnitt und den Abschnitt halbire.

V. Zusatz: Ein Perpendikel, welches die Sehne halbirt, theilet auch den Zentriwinkel, den Bogen, den Ausschnitt und den Abschnitt in zwei gleiche Theile. Denn (Fig. 62.) wenn der Perpendikel cd die Sehne halbirt, so geht er durch den Mittelpunkt des Kreises (§. 56. Zus. II.), und halbirt sowohl den Zentriwinkel (§. 36. Zus. II.), als auch den Bogen, den Ausschnitt und den Abschnitt (Zus. IV.).

VI. Zusatz: Eine Sehne, die nicht ein Durchmesser ist, theilet die Peripherie und die Kreisebene in zwei ungleiche Theile, von welchen der größere auf der Seite des Zentrums liegt.

Es sei (Fig. 62.) die Sehne gb gegeben, welche kein Durchmesser ist (§. 14. f.), und man ziehe von b aus den Durchmesser bf, so ist baf = bgf (§. 14. Zus. VI.), nun ist bhg = bgf und baf = bfg, daher ist der Bogen bfg > bhg (Arithm. I. §. 10. Nro. 3. u. Nro. 5 — 7.); und eben so ist der Ausschnitt bagc größer als der Ausschnitt bhgc.

Anmerkung: Daß (Fig. 16.) der Durchmesser AB sowohl die Kreislinie, als auch die Kreisebene in zwei kongruente Theile theile (§. 14. Zus. VI.), erkennt man auch aus dem, daß der obere gerade Zentriwinkel ACB dem untern ACB gleich ist (§. 7. Zus. I.), und zu gleichen Zentriwinkeln kongruente Bögen und Ausschnitte gehören (§. 60. Zus. I.).

§. 61.

IV. Lehrsatz:

In jedem Kreise gibt der vielfache Zentriwinkel den vielfachen Bogen.

Beweis:

Wenn der Zentriwinkel *ACB* = BCD, und also *ACD* = *ACB* + BCD = 2ACB, so ist der Bogen *AD* des Zentriwinkels *ACD* = 2AB, weil *AB* = BD (§. 60. Zus. I.), mithin *AD* = 2*AB*, und also *AD* = *AB* + *BD* = 2*AB*;

2) Ist *ACB* = *BCD* = *DCE*, und also ACE = ACB, so ist wieder nach dem I. Zusatze des §. 60. der Bogen AB = BD = DE, somit AE = 3AB, und der Zentriwinkel ACE = 3ACB gibt den Bogen AE = 3AB;

3) Da man nun aus den nämlichen Gründen diese Schlüsse immer fortsetzen, und für jede nächst größere Zahl wiederholen kann, so gibt m . ACB den Bogen m . AB, das heißt, wenn im Kreise ein Zentriwinkel m mal so groß ist, als ACB, so ist auch sein Bogen m mal so groß als der Bogen AB des Winkels ACB.

I. Zusatz: Die Zentriwinkel stehen mit ihren Bögen im geraden Verhältnisse, indem nach dem Lehrsatze mit der Zunahme der Zentriwinkel eben so die Zunahme der Bögen verbunden ist (Arith. II. §. 58. a.).

II. Zusatz: Die Zentriwinkel sind mit ihren Bögen gerade proportionirt, oder, wie man sich auch ausdrückt, sie verhalten sich, wie ihre Bögen. Hat man (Fig. 63.) die Zentriwinkel ACB und BCF, so bilden sie mit ihren Bögen AB und BF zwei gleiche geometrische Verhältnisse (Arithm. II. §. 51.), das ist, es verhält sich ACB : BCF = AB : BF (Arithm. II. §. 59.).

III. Zusatz: Im Kreise gehören zu gleichen Bögen gleiche Zentriwinkel, gleiche Sehnen, gleiche Ausschnitte, und gleiche Abschnitte. Denn Fig. 63.) es verhält sich ACB : BCD = AB : BD (Zus. II.); ist nun der Bogen AB = BD, so ist auch der Zentriwinkel ACB = BCD (Arithm. IV. §. 35 Zus. III.), und daraus folgt das Uebrige nach dem I. Zus. des §. 60.

IV. Zusatz: Ein größerer Zentriwinkel hat einen größern Bogen, und ein größerer Bogen einen größern Zentriwinkel. Denn (Fig. 63.) es verhält sich ACD : ACB = AD : AB (Zus. II.); ist nun der Zentriwinkel ACD > ACB, so ist auch der Bogen AD > AB; und umgekehrt, wenn der Bogen AD > AB, so ist auch der Zentriwinkel ACD > ACB (Arithm. IV. §. 35. Zus. II.).

Anmerkung: Den Satz, daß jede zwei beliebige Theile der einen Größe mit den korrespondirenden Theilen der andern beim geraden Verhältnisse gerade zu einander proportionirt sind, zitirte ich hier nach dem §. 59. des II. Theiles der Arithmetik; den Beweis hierüber findet man, weil die bisher erschienenen vier Theile des arithmetischen Lehrbuches die praktische Proportions-Lehre noch nicht enthalten, im §. 9. der von mir zu Kempten über die Begründung und Anwendung des reesischen Ansatzes herausgegebenen Schrift. (Man sehe die Vorrede des IV. Theiles des Lehrbuches der Arithmetik.)

§. 62.

Die Eintheilung der Kreislinie in Halbkreise, Quadranten und Sextanten, wie auch in Grade, Minuten und Sekunden.

a) Die Hälfte der Kreislinie heißt ein Halbkreis (Semiperipheria), der vierte Theil ein Quadrant (Quadrans), und der sechste Theil ein Sextant (Sextans).

b) Der 360ste Theil der Kreislinie wird ein Grad, der 60ste Theil eines Grades eine Minute, und der 60ste Theil einer Minute eine Sekunde genannt.

I. Zusatz: Ein Halbkreis hält 180, ein Quadrant 90, und ein Sextant 60 Grad.

II. Zusatz: Wenn der Zentriwinkel ein rechter Winkel ist, so ist sein Bogen ein Quadrant.

Ist (Fig. 63.) der Zentriwinkel ACE ein rechter Winkel, und man verlängert den Schenkel EC bis GE, so ist sein Nebenwinkel ACG auch ein rechter Winkel (§. 9. Zus. III.), und somit der Winkel ACE = ACG; ferner zu gleichen Zentriwinkeln gehören gleiche Bögen (§. 60.), also ist der Bogen AE = AG, dann AE = ½GAE, und der Bogen GAE ist, da EG ein Durchmesser ist, die Hälfte der Peripherie (§. 14. Zus. VI.); daher ist AE der vierte Theil der Peripherie, das heißt, der Bogen ist ein Quadrant, wenn sein Zentriwinkel ein rechter Winkel ist.

III. Zusatz: Der Zentriwinkel hält so viele Grade, Minuten ꝛc. als sein Bogen.

Ist (Fig. 63.) der Zentriwinkel ACE ein rechter Winkel, und ACB ein Zentriwinkel von beliebiger Größe, so verhält sich in Gemäßheit der dem §. 61. beigefügten Anmerkung ACE : ACB = AE : AB; da nun ACE als ein rechter Winkel 90 Grad hält (§. 11. Zus. I.), und nach dem II. Zusatze sein Bogen ein Quadrant ist, und deßhalb auch 90 Grad hält (Zus. I.), so ist auch der Winkel ACB in der Hinsicht seinem Bogen AB gleich, da beide, Winkel und Bogen, gleich viele Grade, Minuten ꝛc. haben, das heißt, ACB = arc. AB.

Anmerkung: 1) In Frankreich wird die Kreislinie in 4 Theile, oder in 4 Quadranten, ein Quadrant in 100 Grade, ein Grad in 100 Minuten, und eine Minute in 100 Sekunden getheilt.

2) Bei der Eintheilung des Kreises werden die Grade, Minuten und Sekunden, wie bei der Eintheilung des rechten Winkels (§. 11.), mit den Zeichen »° ' "« bezeichnet, und man schreibt z. B. ein gewisser Kreisbogen hat $24^{\circ}\ 14'\ 16''$, anstatt 24 Grad 14 Minuten und 16 Sekunden.

3) Statt daß man schreibt „der Bogen AB“ schreibt man auch manchmal „arcus AB“, oder kürzer „arc. AB.“

§. 63.
Maaß der Winkel.

a) Unter dem Maaße der Winkel versteht man einen Winkel von bestimmter Größe. Weil alle rechte Winkel einander gleich sind, und bei ihnen immer ein Schenkel auf den andern senkrecht steht, so nimmt man den rechten Winkel als das Maaß der Winkel an.

b) Einen Winkel messen heißt sein Verhältniß zum rechten Winkel als dem angenommenen Maaße bestimmen, das ist, angeben, wie oft der rechte Winkel, oder ein aliquoter Theil desselben gesetzt werden muß, um den Winkel zu erhalten, welcher gemessen wird (Arithm. IV. §. 33. Nro. 1.).

I. Zusatz: Weil der rechte Winkel in Grade, Minuten ꝛc. eingetheilt wird (§. 11.), so wird ein Winkel auch gemessen, wenn man seine Größe in Graden, Minuten ꝛc. angibt.

II. Zusatz: Der Bogen mißt seinen Zentriwinkel, da er mit ihm gleich viele Grade, Minuten ꝛc. hat (§. 62. Zus. III.); das heißt, der Zentriwinkel ist seinem Bogen gleich, oder ACB = arc. AB.

§. 64.
V. Lehrsatz:

In ungleichen Kreisen haben die Bögen gleicher Zentriwinkel gleich viele Grade, Minuten ꝛc.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 63. und 64.) die Radien AC und ac der um C und c beschriebenen Kreise ungleich, und deßhalb die Kreise selbst ungleich oder verschieden (§. 15. Zus. IV.);

2) Man bilde sich im Kreise um C den rechten

Winkel ACE, und im Kreise um c den rechten Winkel ace, nehme im ersten Kreise den beliebigen Zentriwinkel ACB an, und mache im zweiten Kreise den Zentriwinkel acb = ACB;

3) Weil die Zentriwinkel mit ihren Bögen im geraden Verhältnisse stehen (§. 61. Zus. I.), und deßhalb damit gerade proportionirt sind (§. 61. Anmerk.), so erhält man die zwei Proportionen:

ACE : ACB = AE : AB,

und ace : acb = ae : ab;

4) Nach Nro. 2. ist ACE = ace und ACB = acb, daher erhält man die neue Proportion (Arithm. IV. §. 43. Nro. 1.):

AE : AB = ae : ab;

5) In dieser Proportion ist AE = ae, da diese beiden Bögen Quadranten sind, und jeder 90 Grad hält (§. 62. Zus. II.); deßhalb ist auch der Bogen AB = ab (Arithm. IV. §. 35. Zus. III.), das ist, die Bögen AB und ab der gleichen Zentriwinkel ACB und acb halten gleich viele Grade, Minuten ꝛc., wenn auch die Kreise verschieden sind.

Zusatz: Man kann also den Winkel durch einen Bogen eines Kreises mit einem beliebigen Halbmesser messen, da der Bogen des kleinern Kreises beim nämlichen Zentriwinkel eben so viele Grade, Minuten ꝛc. hat, wie der Bogen des größern Kreises.

Anmerkung: 1) Auf den Satz, daß der Zentriwinkel seinen Bogen mißt (§. 63. Zus. II.), gründet sich die mechanische Methode, die Winkel zu messen, und Winkel von einer gegebenen Anzahl Grade, Minuten ꝛc. zu zeichnen. Die Werkzeuge, derer man sich dazu bedient, heissen überhaupt Winkelmesser.

Der Winkelmesser, den man auf dem Papier gebraucht, wird ein Transporteur genannt; er besteht aus einem Halbkreise, den man auf Holz, Pappe, Horn oder Messing zeichnet, und genau in seine 180 Grad theilet.

Will man nun (Fig. 6.) einen gegebenen Winkel ABC auf dem Papier messen, so legt man das Zentrum des Transporteurs auf den Scheitel B, und den Radius auf den Schenkel BC, alsdann zeigt der andere Schenkel BA die Grade des Bogens auf dem Transporteur an, und eben so viele Grade hat der Zentriwinkel ABC.

Will

Will man hingegen (Fig. 6.) auf einer geraden Linie BC in B einen Winkel von gewissen Graden zeichnen, so verfährt man, wie vorhin, und bemerkt den Punkt A, wo der gegebene Grad auf dem Papier liegt, und zieht die Linie BA, alsdann hat der gezeichnete Zentriwinkel CAB, wie sein Bogen, die gegebene Anzahl von Graden.

2) Besser sieht man die Einrichtung des Transporteurs, wenn man seinen Gebrauch vorzeigt, und somit das Instrument wirklich vor sich hat; aus diesem Grunde findet man ihn in den beigefügten Tabellen nicht abgezeichnet.

3) Von den Instrumenten, mit welchen auf dem Felde Winkel gemessen werden, wird in der praktischen Geometrie die Rede sein.

§. 65.

VI. Lehrsatz:

Die Sehne des Sextanten ist dem Radius gleich.

Beweis:

1) Ist (Fig. 64.) der Bogen fg des Kreises um c ein Sextant, und also gleich 60°, so hält der Zentriwinkel fcg dieses Bogens auch 60 Grad (§. 63. Zus. II.), und deßwegen beträgt die Summe der beiden übrigen Winkel f und g des Dreieckes fcg noch 120 Grad (§. 43. Zus. I.);

2) Das Dreieck fcg ist wegen der Gleichheit der Radien cf und cg gleichschenklicht, und deßwegen der Winkel $f = g$ (§. 21. Zus. I.), mithin $f = g = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ = fcg$;

3) Hat aber jeder Dreieckswinkel 60°, so sind die drei Winkel c, f und g einander gleich, und das Dreieck ist auch gleichseitig (§. 23. Zus. II.), also $fg = cf$, das heißt, die Sehne des Sextanten ist dem Radius gleich.

Zusatz: Weil die ganze Kreislinie sechs Sextanten hat (§. 62. a.), und nach dem Lehrsatze jede Sehne des Sextanten dem Radius gleich ist, so läßt sich der Radius sechsmal an der Peripherie des Kreises auftragen.

§. 66.

VII. Lehrsatz:

Zwei gleiche Sehnen sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt, und Sehnen, von welchen der Mittelpunkt gleich weit absteht, sind gleich.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 61.) die Sehne AB = GF, und man ziehe die Radien CA, CB, CG und CF, wie auch vom Zentrum auf die beiden Sehnen die Perpendikel CH und CJ, um die Entfernungen des Zentrums von den Sehnen zu erhalten (§. 33. Zus. II.);

2) Die aus des Kreises Mittelpunkte gezogenen Perpendikel halbiren die Sehnen (§. 56.), es ist also AH = ½AB, und GJ = ½GF, und also wie nach der Voraussetzung AB = GF, ist auch

AH = GJ,
ferner AC = GC (§. 14. Zus. IV.),
H = J (§. 8. c. und d.),

also △ AHC ≌ △ GJC (§. 34. Zus. II.),
und CH = GF (§. 18. Zus. IV.).

Das heißt, gleiche Sehnen sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt.

3) Sind dagegen die Entfernungen der Sehnen vom Mittelpunkte gleich, so ist aus den so eben bei Nro. 2. angeführten Gründen

CH = CJ,
ferner CA = CG,
und H = J = 90°,

also △ HCA ≌ △ GCJ,
und AH = GJ.

4) Weil die Perpendikel die Sehnen halbiren (§. 56.) so ist AH = ½AB, und GJ = ½GF, und also, weil AH = GJ, auch ½AB = ½GF, mithin AB = GF, das ist, Sehnen, die vom Mittelpunkte gleich weit entfernt sind, sind einander gleich.

Zusatz: Ungleiche Sehnen haben ungleiche Entfernungen vom Mittelpunkte, und bei ungleichen Entfernungen sind die Sehnen ungleich.

§. 67.

VIII. Lehrsatz:

Das Zentrum des Kreises steht von einer kleinern Sehne weiter ab, als von einer größern, und eine Sehne, von welcher das Zentrum weiter absteht, ist kleiner.

Beweis:

1) Ist (Fig. 61.) die Sehne AB kleiner, als GL, so mache man den Zentriwinkel GCF gleich dem Winkel ACB (§. 25), welcher zur kleinern Sehne AB gehört, und ziehe vom Zentrum aus zur Bestimmung der Entfernungen die Perpendikel CH, CJ und CM, so ist CJ > CN (Arithm I. § 10. Nro. 3);

2) Die Linie CN ist im rechtwinklichten Dreiecke CNM die Hypotenus (§. 29. c.), und deßhalb größer als CM (§. 30. Zus. IV.), mithin ist auch CH > CM, das heißt, das Zentrum steht von einer kleinern Sehne weiter ab, als von einer größern;

3) Steht umgekehrt C von AB weiter ab, als von GL, so ist die Sehne AB nicht gleich GL, weil sonst gegen die Voraussetzung auch CH gleich CM wäre (§. 66.); auch kann, wenn CH > CM, die Sehne AB nicht größer sein, als GL, weil sonst nach Nro. 2. auch die Entfernung CH kleiner wäre, als der Abstand CM; also ist AB < GL, das heißt, diejenige Sehne ist kleiner, welche vom Mittelpunkte weiter entfernt ist.

Zusatz: Der Durchmesser ist die größte Sehne; weil er durch das Zentrum des Kreises geht, und somit seine Entfernung vom Mittelpunkte gleich Null ist; gleichwie man die kleinste Sehne hat, sobald ihre Entfernung vom Mittelpunkte den Halbmesser des Kreises beträgt.

§. 68.

IX. Lehrsatz:

Die Mitte des Halbkreises steht von dem Durchmesser, der seine beiden Endspunkte verbindet, weiter ab, als jeder andere Punkt des Halbkreises.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 65.) der Halbkreis AQB gegeben, und AB der Durchmesser, der die beiden Endspunkte des Halbkreises verbindet, dann Q sei der Mittelpunkt, der von A und B gleich weit entfernt ist, und QR der vom Punkte Q aus gezogene Diameter; so ist der Bogen AQ = QB, und zu gleichen Bögen gehören gleiche Sehnen (§. 61. Zus. III.), daher ist der Zentriwinkel ACQ = QCB;

2) Diese beiden Winkel sind Nebenwinkel, mithin, da sie einander gleich sind, rechte Winkel (§. 8. a. und c.), und der Durchmesser QR steht auf dem Diameter AB senkrecht, weßhalb der Radius QC die Entfernung des Mittelpunktes des Halbkreises von seinem Durchmesser AB angibt (§. 33. Zus. II.);

3) Nimmt man nun zwischen A und Q den beliebigen Punkt K an, und zieht man die Sehne KL senkrecht auf AB, so bestimmt die halbe Sehne KG (§. 56.) die Entfernung des Punktes K vom Diameter AB, und QR ist größer als KL (§. 14. Zus. VIII.), weßhalb auch ½QR > ½KL, oder QC > KG; das heißt, der Mittelpunkt des Halbkreises AQB ist vom Diameter AB weiter entfernt, als jeder andere Punkt des Halbkreises.

Zusatz: Jeder Punkt des Halbkreises, der der Mitte näher liegt, steht vom Durchmesser desselben weiter ab, als ein Punkt, der sich von der Mitte des Bogens weiter entfernt.

Nimmt man (Fig. 65.) den Punkt K an, der der Mitte Q des Halbkreises AQB näher liegt, als der Punkt A, und zieht man auf den Durchmesser AB

die Sehnen KL und HJ senkrecht, so ist, weil FC > GC, die Sehne KL > HJ (§. 67.), und also ½KL > ½HJ, oder KG > HF (§. 56.), d. h., der dem Mittelpunkt des Halbkreises näher liegende Punkt K ist vom Diameter dieses Halbkreises weiter entfernt, als der Punkt H.

§. 69.

X. Lehrsatz:

Die Mitte eines Kreisbogens steht von seiner Sehne weiter ab, als jeder andere Punkt des Bogens.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 65.) der Punkt Q die Mitte des Kreisbogens DQE, und DE die Sehne desselben;

2) Man ziehe die Radien CD und CE, dann durch C den Durchmesser AB mit DE parallel (§. 39.), und vom Punkte Q aus den Durchmesser QR (§. 15. Anm. 2.), so ist nach Nro. 1. der Bogen DQ = QE, mithin der Zentriwinkel DCQ = QCE (§. 61. Zus. III.), und im gleichschenklichten Dreiecke DCE (§. 14. Zus. IV.) steht die Linie CP oder RQ, welche den Winkel DEC halbirt, auf DE senkrecht (§. 36. Zus. I.);

3) Weil DE mit AB parallel gezogen ist, so ist QR auch auf AB senkrecht (§. 41. Zus. VIII.), und der Punkt Q ist auch die Mitte des Halbkreises AQB;

4) Man nehme im Kreisbogen DQE zwischen D und Q den beliebigen Punkt K an, und ziehe die Sehne KL senkrecht auf DE, so ist KL mit QR parallel (§. 38. Zus. I.), und das Viereck NGPC ist ein Parallelogramm (§. 48. a.), wo die Linie NG = PC (§. 48. Zus. V.);

5) Die Entfernung QC ist größer, als KG (§. 68.), weßhalb QC — PC > KG — NG (Arithm. I. §. 34. II.), und QP > KN, das ist, die Mitte eines Kreisbogens steht von der Sehne desselben weiter ab, als jeder andere Punkt des Bogens.

I. Zusatz: Auch auf der entgegengesetzten Seite steht (Fig. 65.) die Mitte des Bogens DRE von der Sehne weiter ab, als jeder andere Punkt dieses Bogens. Denn aus den vorhin angeführten Gründen ist CR > GL, und CP = GN, also PC + CR > NG + GL (Arithm. I. §. 25. II.), mithin PR > NL, das ist, die Mitte R ist von der Sehne DE weiter entfernt, als jeder andere Punkt des Bogens DRE.

II Zusatz: Jeder Punkt der beiden Bögen, in welche die Kreislinie durch eine Sehne getheilt wird (§. 14. Zus. V.), ist, wenn er der Mitte der Bögen näher liegt, weiter von der Sehne entfernt, als jeder andere Punkt, der weiter von der Mitte absteht.

Nimmt man nämlich (Fig 65.) zwischen D und K den beliebigen Punkt H an, und zieht man die Sehne HJ senkrecht auf DE, somit auch perpendikulär auf den mit DE parallelen Diameter AB, so ist, weil KL dem Mittelpunkte des Kreises näher liegt, die Sehne KL > HJ (§. 67.), und also KG > HF, und GL > FJ (§. 56.), und daraus folgt, daß KN > HM, und LN > JM.

§. 70.

III. Aufgabe, einen Kreisbogen in zwei gleiche Theile zu theilen.

I. Auflösung:

Soll man (Fig. 59.) den Bogen AEB halbiren, so ziehe man die Radien CA und CB, und halbire den Zentriwinkel ACB (§. 26.) durch den Radius CE, so theilet dieser auch den Bogen AEB in zwei gleiche Theile (§. 60. Zus. I.).

II. Auflösung:

Man ziehe zum Bogen AEB die Sehne AB, und halbire diese durch das Perpendikel EC (§. 27. Zus. I.), so theilet es den Bogen AEB in zwei gleiche Theile.

Anmerkung: Weil der Mittelpunkt des Kreises von den beiden Endspunkten der Sehne des Bogens gleich weit

entfernt ist (§. 14. c. u. e.), so beschreibt man nur mehr mit zwei gleichen Radien, von welchen jeder größer ist, als die halbe Sehne (§. 17. Zus. II.), auf der Seite des Kreisbogens zwei Bögen, die sich schneiden, und zieht von ihrem Durchschnittspunkte zum Zentrum eine gerade Linie, welche dann den gegebenen Kreisbogen halbirt.

§. 71.

XI. Lehrsatz:

Der Zentriwinkel ist doppelt so groß, als sein Peripheriewinkel.

Beweis:

Der Mittelpunkt des Kreises kann in Absicht auf den Peripheriewinkel eine dreifache Lage haben, er kann nämlich in einem Schenkel, oder zwischen beiden Schenkeln, oder außer den Schenkeln des Peripheriewinkels liegen.

1) Liegt das Zentrum in einem Schenkel des Peripheriewinkels, wie es (Fig. 62.) beim Winkel abf der Fall ist, so ist der äußere Winkel acf, da das Dreieck acb gleichschenklicht ist, doppelt so groß, als der innere entgegengesetzte Winkel abc oder abf (§. 43. Zus. VII.).

Der äußere Winkel acf ist aber der Zentriwinkel, und abf sein Peripheriewinkel, da die Schenkel beider Winkel auf dem nämlichen Bogen af aufstehen; daher ist im ersten Falle der Zentriwinkel doppelt so groß, als sein Peripheriewinkel, das heißt, $acf = 2abf$.

2) Liegt (Fig. 66.) das Zentrum C innerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels BAD, so ziehe man vom Scheitel A aus den Durchmesser AE (§. 15. Anm. 2.), man erhält dadurch zwei Peripheriewinkel BAE und EAD, bei welchem allemal das Zentrum in einem Schenkel liegt, daher ist nach Nro. 1.

$BCE = 2BAE$,
und $ECD = 2EAD$,

also $BCE + ECD = 2BAE + 2EAD$ (Arithm. I. §. 25. I.)
folglich $BCD = 2BAD$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 2.).

Das heißt, der Zentriwinkel BCD ist doppelt so groß als sein Peripheriewinkel BAD.

3) Liegt das Zentrum außer den beiden Schenkeln, wie es (Fig. 66.) beim Winkel AFB der Fall ist, so ziehe man wieder vom Scheitel A den Durchmesser AE, es ist jetzt

$$\left.\begin{array}{r} FCE = 2FAE, \\ \text{und } BCE = 2BAE, \end{array}\right\} \text{nach Nro. 1.}$$

also FCE—BCE=2FAE—2BAE (Arithm. I. §. 34. I.), folglich FCB = 2FAB.

Daher ist jeder Zentriwinkel doppelt so groß, als sein Peripheriewinkel, oder, was eines ist, jeder Peripheriewinkel ist die Hälfte seines Zentriwinkels.

I. Zusatz: Der Peripheriewinkel hat die Hälfte jenes Kreisbogens zum Maaße, auf welchem seine Schenkel als Sehnen des Kreises aufstehen. Hat man (Fig. 66.) den Peripheriewinkel BAE, so ist BCE sein Zentriwinkel; nun ist BCE = arc. BE (§. 62. Zus. III.), und nach dem Lehrsatze ist BAE = ½BCE, daher ist BAE = ½ arc. BE.

II. Zusatz: Peripheriewinkel, derer Schenkel auf dem nämlichen Kreisbogen aufstehen, sind einander gleich; weil sie dann das nämliche Maaß haben (Zus. I.).

III. Zusatz: Ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel auf einem Durchmesser des Kreises aufstehen, ist ein rechter Winkel.

Ist (Fig. 67.) der Peripheriewinkel BAC gegeben, und stehen seine Schenkel AB und AC auf den Endspunkten des Diameters BC auf, so beträgt das Maaß dieses Winkels den halben Bogen BDC (Zus. I.); nun halbirt aber der Durchmesser BC die Kreislinie (§. 14. Zus. VI.), und der Bogen BDC ist ein Halbkreis, oder hält 180 Grad, somit ist seine Hälfte ein Quadrant, und der Peripheriewinkel BAC hält 90 Grad, ist also ein rechter Winkel (§. 11. Zus. I.).

IV. Zusatz: Der Peripheriewinkel, dessen Bogen größer ist, als ein Halbkreis, ist stumpf, und der Peripheriewinkel, dessen Bogen kleiner ist, als ein Halbkreis, ist spitzig.

Ist (Fig. 68.) der Bogen *ACD* des Peripheriewinkels *ABC* größer als ein Halbkreis, so ist seine Hälfte größer als 90 Grad, und der Winkel *ABC*, welcher $= \frac{1}{2}$ arc. *ADC* (Zus. I.) ist stumpf; ist aber der Bogen *ABC* des Peripheriewinkels *ADC* kleiner als ein Halbkreis, so ist seine Hälfte kleiner als 90 Grad, und der Winkel *ADC*, welcher $= \frac{1}{2}$ arc. *ABC*, ist spitzig (§. 11. Zus. II.).

V. Zusatz: Geht die Kreislinie durch die vier Ecke seines Viereckes, so ist in diesem jedes Paar opponirter Winkel zwei rechten Winkeln gleich, oder $= 180$ Grad.

Geht (Fig. 68.) die Kreislinie durch die vier Ecke des Vierecks *AC*, so ist nach dem I. Zusatze

$$ABC = \tfrac{1}{2}\,\text{arc. } ADC,$$
$$\text{und } ADC = \tfrac{1}{2}\,\text{arc. } ABC,$$

$$\text{also } ABC + ADC = \tfrac{1}{2}\,\text{arc. } ADC + \tfrac{1}{2}\,\text{arc. } ABC$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(\text{arc. } ADC + \text{arc. } ABC)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\text{periph.} = 180 \text{ Grad (§. 62. Zus. I.).}$$

Eben so ist

$$BAD = \tfrac{1}{2}\,\text{arc. } BCD,$$
$$\text{und } BCD = \tfrac{1}{2}\,\text{arc. } BAD,$$

$$\text{also } BAD + BCD = \tfrac{1}{2}\,\text{arc. } BCD + \tfrac{1}{2}\,\text{arc. } BAD$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(\text{arc. } BCD + \text{arc. } BAD)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\text{periph.} = 180 \text{ Grad.}$$

Es haben also in einem solchen Vierecke die opponirten Winkel zusammen allemal 180 Grad, oder sind zwei rechten Winkeln gleich.

§. 72.

Tangens und Sekans des Kreises.

a) Eine gerade Linie, welche mit der Kreislinie nur einen Punkt gemein hat, und sonst in der näm-

lichen Ebene ganz außer dem Kreise liegt, heißt eine Tangens.

b) Eine gerade Linie, von welcher in einer Ebene ein Theil innerhalb, und ein Theil außerhalb des Kreises liegt, heißt eine Sekans.

Daher ist (Fig. 69.) die Linie BD eine Tangens, weil sie mit der Kreislinie in einer Ebene nur einen Punkt gemein hat, und sonst ganz außer dem Kreise liegt, und HE ist eine Sekans, da in einer Ebene der Theil AH außerhalb, und der Theil AE innerhalb des Kreises liegt.

§. 73.

XII. Lehrsatz:

Eine gerade Linie, welche in einer Ebene auf dem Radius oder Durchmesser am Endspunkte perpendikulär steht, ist eine Tangens des Kreises.

Beweis:

1) Steht (Fig. 69.) die gerade Linie am Endspunkte A auf dem Radius AC oder auf dem Durchmesser AQ senkrecht, so hat in dieser Voraussetzung DB mit der Peripherie des Kreises den Punkt A gemein;

2) Nimmt man in dieser Linie den beliebigen Punkt G an, und zieht man vom Zentrum C die gerade Linie CG, so ist wegen des rechten Winkels bei A die Linie CG größer, als der Radius CA (§. 30. Zus. IV.), und deßhalb liegt jeder andere Punkt der Linie BD außer dem Kreise; die Linie DB ist daher eine Tangens des Kreises (§. 72. a.).

§. 74.

XIII. Lehrsatz:

Eine gerade Linie, die mit dem Radius am Endspunkte einen schiefen Winkel bildet, ist eine Sekans des Kreises.

Beweis:

1) Steht (Fig. 69.) die gerade Linie HE am Endspunkte A auf dem Radius AC, oder dem Durchmesser AQ schief auf (§. 8. b.), und man zieht aus C auf HE das Perpendikel CF, so kann es mit CA nicht zusammen fallen (§. 8. c. und d.), und man erhält wegen des rechten Winkels bei F das rechtwinklichte Dreieck AFC, wo der Radius AC > CF (§. 30. Zus. IV.), weßhalb der Punkt F der Linie HE innerhalb des Kreises liegt;

2) Nimmt man unter dem Punkte A in der Linie HE den Punkt H an, und zieht man die gerade Linie HC, so ist im rechtwinklichten Dreiecke AFC der Winkel m spitzig (§. 29. Zus.), somit sein Nebenwinkel n stumpf (§. 9. Zus. V.), und im stumpfwinklichten Dreiecke HAC ist HC > AC (§. 30. Zus. IV.), daher liegt der Punkt H der Linie HE außer dem Kreise, und diese Linie ist eine Sekans (§. 72. b.).

I. Zusatz: Die Tangens steht am Berührungspunkte auf den Radius senkrecht; weil sie sonst, im Falle sie mit dem Radius schiefe Winkel bilden würde, nach dem aufgestellten Lehrsatze eine Sekans wäre.

II. Zusatz: Für jeden Punkt der Peripherie gibt es nur eine Tangens; indem es durch jeden Punkt der Peripherie auf den Radius nur ein Perpendikel gibt (§. 32. Zus. II.).

III. Zusatz: Wenn man auf die Tangens am Berührungspunkte ein Perpendikel zieht, so geht es durch den Mittelpunkt des Kreises.

Denn (Fig. 69.) ginge das Perpendikel AE nicht durch das Zentrum, so könnte man vom Berührungspunkte A den Radius AC ziehen, welcher auch auf

die Tangens DB senkrecht wäre (Zus. I.); auf DB kann es aber in einer Ebene nur ein einziges Perpendikel vom Punkte A aus geben (§. 32. Zus. II.), daher muß das Perpendikel AE durch das Zentrum des Kreises gehen.

IV. Zusatz: Zwischen der Tangens und der Peripherie des Kreises läßt sich durch den Berührungspunkt keine andere gerade Linie mehr ziehen. Denn (Fig. 69.) jede andere gerade Linie durch A, die nicht mit der Tangens zusammen fällt, steht auf dem Radius schief, und liegt also als eine Sekans zum Theile innerhalb des Kreises (Lehrs.).

V. Zusatz: Der Winkel zweier Sekanten außerhalb des Kreises ist der halben Differenz der Bögen gleich, welche die Sekanten abschneiden.

Stoßen (Fig. 70.) die beiden Sekanten AB und CB außer dem Kreise in B zusammen, und zieht man die Linie AE, so ist der äußere Dreieckswinkel $m = A + B$ (§. 43. Zus. VI.), somit $B = m - A$ (Arithm. III. §. 96. Zus. I.), und also, weil m und A Peripheriewinkel sind (§. 59. b.), der Winkel B $= \frac{1}{2}$ arc. AC $+ \frac{1}{2}$ arc. DE (§. 71. Zus. I.), das ist, der Winkel $B = \frac{1}{2}(AC - DE)$, wenn man nämlich die ganze Differenz halbirt, anstatt jeden Bogen mit 2 zu dividiren (Arithm. III. §. 53. Lehrs. III.).

§. 75.

IV. Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt der Peripherie eine Tangens des Kreises zu ziehen.

Auflösung:

Soll (Fig. 69.) durch den Punkt A der Peripherie eine Tangens des Kreises gezogen werden, so ziehe man von A den Radius AC, und ziehe durch diesen Punkt die Linie DB auf AC senkrecht (§. 45.), so ist DB die verlangte Tangens des Kreises (§. 73.).

§. 76.

XIV. Lehrsatz:

Zieht man im Kreise vom Berührungspunkte der Tangens eine Sehne, welche kein Durchmesser des Kreises ist, so ist der spitzige Winkel, welchen die Tangens mit der Sehne macht, dem Peripheriewinkel gleich, welcher auf dem kleineren Bogen der Sehne aufsteht, und der stumpfe Winkel, den die Sehne mit der Tangens bildet, ist dem Peripheriewinkel gleich, welcher auf dem größeren Bogen der Sehne steht.

Beweis:

1) Ist (Fig. 71) die Linie ED eine Tangens des Kreises, und A der Berührungspunkt, und werden zur Linie AB nebst dem Durchmesser AG die Sehnen GB, BF und FA gezogen, so ist ABG ein rechter Winkel (§. 71. Zus. III.), und deßhalb GAB + AGB = 90 Grad (§. 43. Zus. V.);

2) Die Tangens macht mit dem Radius oder Durchmesser des Kreises allemal einen rechten Winkel (§. 82. Zus.), daher ist GAD, oder GAB + BAD = 90 Grad, und also BAD = AGB; es ist nämlich nach Nro. 1.

GAB + AGB = 90°, und nach Nro. 2.
GAB + BAD = 90°, also (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.),

GAB + BAD = GAB + AGB,
dann GAB = GAB (Arithm. I. §. 10. Nro. 1.),

folglich BAD = AGB.

Es ist also der spitzige Winkel BAD, den die Sehne mit der Tangens macht, dem Peripheriewinkel AGB gleich, dessen Schenkel auf dem kleineren Bogen der Sehne aufstehen.

3) Die Winkel EAB und BAD sind Nebenwinkel (§. 8. a.), und beim Vierecke GF geht die Kreislinie, weil alle Seiten Sehnen des Kreises sind (Nro. 1.), durch alle vier Ecke; deßhalb ist

$$EAB + BAD = 180 \text{ Grad} \ (\S. 11. \text{ Zus. III.}),$$
$$\text{und } \underline{AFB + AGB = 180 \text{ Grad}} \ (\S. 71. \text{ Zus. V.}),$$
$$\text{also } EAB + BAD = AFB + AGB,$$
$$\text{dann nach Nro. 2. ist } \underline{BAD = AGB,}$$
$$\text{mithin } EAB = AFB.$$

Es ist also der stumpfe Winkel EAB, den die Sehne mit der Tangens macht, gleich dem Peripheriewinkel AFB, dessen Schenkel auf dem größeren Bogen der Sehne aufstehen.

Zusatz: Die Winkel, welche die Tangens auf beiden Seiten mit der Sehne macht, sind den halben Bögen gleich, die zwischen ihnen liegen. Denn (Fig. 71.) nach dem Lehrsatze ist

$$\left.\begin{array}{l} BAD = AGB = \tfrac{1}{2} \text{ arc. } AFB \\ \text{und } EAB = AFB = \tfrac{1}{2} \text{ arc. } AGB \end{array}\right\} \S. 71. \text{ Zus. I.}$$

Anmerkung: Zieht man vom Berührungspunkte eine Sehne durch das Zentrum, welche ein Diameter des Kreises ist, so steht die Tangens auf dem Durchmesser senkrecht (§. 74. Zus. I.), und die beiden Winkel, welche die Tangens mit dem Durchmesser bildet, sind rechte Winkel, gleichwie es auch die Peripheriewinkel sind, die beiderseits auf dem Diameter aufstehen (§. 71. Zus. III.).

§. 77.

XV. Lehrsatz:

Zwei Tangenten, die auf den Endspunkten des Durchmessers stehen, sind parallel; stehen aber zwei Tangenten auf einer Sehne, die nicht ein Durchmesser ist, so stoßen sie auf der Seite des kleineren Bogens der Sehne zusammen.

Beweis:

1) Stehen (Fig. 69.) die Tangenten AD und QM auf dem Diameter AQ senkrecht, so ist DAQ $= 90°$ und AQM $= 90°$ (§. 11. Zus.), also DAQ $+$ AQM $= 180$ Grad, und weil die Tangenten mit dem Kreise in einer Ebene sind, ist AD parallel mit QM.

2) Stehen aber (Fig. 72.) die Tangenten AL und AM auf der Sehne HK, das ist, gehen sie durch die

Endspunkte der Sehne, welche kein Durchmesser ist (§. 14. f.), so liegt C außerhalb HK; zieht man nun die Radien HC, und KC, so ist AHC = AKC = 90° (§. 74. Zus. I.), und AHC + AKC = 180°, folglich, weil AHK und AKH nur Theile von AHC und AKC sind, AHK + AKH < 180 Grad (Arithm. I. §. 10. Nro. 3.); daher stoßen die Linien HA und KA auf der Seite des kleineren Bogens HDK zusammen (§. 40.).

§. 78.

V. Aufgabe, von einem außer dem Kreise gegebenen Punkte in einer Ebene zwei Tangenten zu ziehen.

Auflösung:

1) Man ziehe (Fig. 72.) von dem außer dem Kreise gegebenen Punkte A zum Zentrum des Kreises die Sekans AC, und durch den Durchschnittspunkt B auf AC den Perpendikel DE;

2) Mit der Linie CA als Radius beschreibe man von C aus eine Kreislinie, welche den Perpendikel in zwei Punkten D und E schneiden wird (§. 16.), oder bestimme sich vielmehr nur mit dem Halbmesser CA diese Durchschnittspunkte, und ziehe die geraden Linien CD und CE;

3) Von A aus ziehe man zu den Durchschnittspunkten H und K die geraden Linien AH und AK, so sind sie die beiden verlangten Tangenten, welche auf verschiedenen Seiten von AC liegen.

Beweis:

1) Weil man nach Nro. 2. mit dem Halbmesser CA die Punkte D und E bestimmte, so ist

CD = CA,
dann CH = CB (§. 14. Zus. IV.),
und HCA = BCD,

also △ DCB ≌ △ AHC (§. 20.),
folglich AHC = DCB = 90 Grad (Nro. 1.).

Es ist also AH am Endspunkte H auf den Radius HC senkrecht, und deßhalb eine Tangens des Kreises.

2) Aus den nämlichen Gründen ist auf der andern Seite

AC = CE,
dann CB = CK,
und BCE = KCA,

also △ ACK ≌ △ BCE,
folglich AKC = CBE = 90°.

Daher ist AK ebenfalls eine Tangens des Kreises.

I. Zusatz: Die aus einem Punkte in einer Ebene zu beiden Seiten gezogenen Tangenten sind einander gleich. Denn (Fig. 72.)

CH = CK (§. 14. Zus. IV.),
CA = CA,
und CHA = CKA (§. 74. Zus. I.),

also △ CHA ≌ △ CKA (§. 34. Zus. II.),
folglich AH = AK.

II. Zusatz: Ist (Fig. 72.) die Linie AK der Tangens AH gleich, so ist AK ebenfalls eine Tangens; weil CH = CK, und CA = CA, also △ CHA ≌ △ CKA (§. 24.), somit CKA = CHA = 90 Grad (§. 74. Zus. I.).

III. Zusatz: Von einem aus dem Kreise gegebenen Punkte lassen sich in einer Ebene nur zwei Tangenten des Kreises ziehen. Denn (Fig. 72.) hat man von A die beiden Tangenten AH und AK gezogen, und man wollte von diesem Punkte aus noch eine dritte Tangens des Kreises beschreiben, welche am Berührungspunkte auf den Radius senkrecht stehen müßte (§. 74. Zus. I.), so würde sie allemal ein rechtwinklichtes Dreieck bilden, welches AC zur Hypotenuse, und den Radius zum Perpendikel hat, das somit mit dem Dreiecke AHC, oder mit AKC kongruirte; weßhalb diese dritte Tangens mit AH, oder mit AK zusammen fallen würde, und also von diesen nicht verschieden wäre.

III. Haupt-

III. Hauptstück.

Von Verhältnissen gerader Linien.

I. Abschnitt.

Von Verhältnissen gerader Linien in geradlinigten ebenen Figuren.

---

§. 79.

Das Maaß gerader Linien.

a) Wird eine gerade Linie von bekannter Länge angenommen, um ihr Verhältniß zu andern geraden Linien, und dadurch die Größe der letztern zu bestimmen, so nennt man dieselbe das Maaß gerader Linien, oder ein Längenmaaß;

b) Eine gerade Linie messen, heißt ihr Verhältniß zum Längenmaaß angeben, somit bestimmen, wie oft das Längenmaaß, oder ein gewisser Theil davon gesetzt werden muß, um die gerade Linie zu erhalten, welche gemessen wird (I. Arithm. §. 2. e.).

I. Zusatz: Da die eingeführten üblichen Längenmaaße Ruthen, Schuhe, Zolle, Linien ꝛc. genannt werden (Arithm. I. §. 79.), so wird eine gerade Linie gemessen, wenn man ihre Länge in Ruthen, Schuhen, Zollen ꝛc. angibt, d. h., wenn man bestimmt, wie viele Ruthen, Schuhe, Zolle ꝛc. eine gerade Linie hat.

II. Zusatz: Zwei Linien stehen nur in so ferne in einem geometrischen Verhältnisse (Arithm. IV. §. 33. Nro. 1.), in so ferne sie gezählte Größen sind, das ist, in wie ferne ihre Größe durch ein gemeinschaftliches Maaß in Zahlen ausgedrückt ist (Arith. I. §. 6. a.).

III. Zusatz: Was von Verhältnissen und Proportionen in der Arithmetik allgemein gesagt wird, gilt demnach auch in Absicht auf die Verhältnisse und Proportionen der Linien.

Anmerkung: 1) Wenn AB, BC und AC Linien bezeichnen, so zeigen die Ausdrücke AB × BC, dann $\frac{AB \cdot BC}{AC}$, ferner AB^2, und $\sqrt{AB}$ in der Folge Produkte, Quotienten, Quadrate und Quadratwurzeln nicht von Linien, sondern von Zahlen an, die man erhält, wenn man diese Linien durch ein gemeinschaftliches Maaß mißt.

2) Im I. Theile meines Lehrbuches der Arithmetik im §. 79. findet man in Betreff der Längenmaaße die benöthigten Begriffe nebst einer genauen Hinweisung auf die gesetzlichen Bestimmungen des kön. baier. Regierungsblattes, und zwei Tabellen, welche die Eintheilung des Fußes oder Schuhes im Duodezimal- und Dezimalmaaße darstellen.

3) Das zehntheilige Maaß ist wegen seiner großen Bequemlichkeit beim Rechnen in unserm Dezimalsysteme (Arithm. I. §. 15.) von den Geometern angenommen worden.

§. 80.

I. Lehrsatz:

Wenn man auf einem Schenkel eines Winkels eine beliebige Anzahl gleicher Theile aufträgt, und durch die Theilungspunkte Parallellinien zieht, so werden auch auf dem andern Schenkel durch die Parallelen eben so viele unter sich gleiche Theile bestimmt.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 73.) der Winkel BAC gegeben, und auf dem Schenkel AB seien die gleichen Theile Aa, ab, bc und cd aufgetragen;

2) Man ziehe (§. 39.) durch die Punkte a, b, c und d die Parallellinien af, bg, ch und di, und durch die neuen Durchschnittspunkte f, g und h die geraden Linien fk, gm und hn parallel mit AB;

3) Es ist nach der Voraussetzung Aa = ab = bc = cd, ferner ab = fk, dann bc = gm, und cd = hn, (§. 41. Zus. IV.), mithin Aa = fk = gm = hn (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.);

4) Die Winkel Aaf, abg, bch und cdi sind einander gleich, ferner ist abg = fkg, dann bch = gmh, und cdi = hni (§. 41.), also ist Aaf = fkg = gmh = hni;

5) Endlich ist, da die Linien af, bg, ch und di parallel sind, der Winkel Afa = fgk = ghm = hin.

Daher sind die Dreiecke Aaf, fkg, gmh und hni zu einander kongruent (§. 44.), und Af = fg = gh = hi (§. 18. Zus. IV.); d. h., wenn man auf dem Schenkel AB mehrere gleiche Theile aufträgt, und durch die Theilungspunkte Parallelen zieht, so schneiden sie auf dem andern Schenkel eben so viele gleiche Theile ab.

I. Zusatz: Wenn (Fig. 73.) dem Theile Aa des einen Schenkels in voriger Konstruktion der Theil Af des andern Schenkels entspricht, so gehört zum Theile Ab = 2Aa der Theil Ag = 2Af, dann zum Theile Ac = 3Aa der Theil Ah = 3Af, und überhaupt, wenn n eine ganze Zahl bezeichnet, zum Theile n . Aa der Theil n . Af, das ist, jedes Vielfache von Aa gibt auf dem andern Schenkel das Gleichvielfache von Af.

II. Zusatz: Die Theile des einen Schenkels stehen mit den korrespondirenden Theilen des andern Schenkels, welche durch die auf die angezeigte Weise gezogenen Parallelen bestimmt werden, im geraden Verhältnisse; da dem zwei-, drei-, und überhaupt n mal größern Theile des einen Schenkels ein zwei-, drei-, und überhaupt n mal größerer Theil des andern Schenkels entspricht (Arithm. II. §. 58. a.).

III. Zusatz: Weil (Fig. 73.) die Parallele af = bk, dann bg = cm, und ch = dn (§. 41. Zus. IV.), und wegen der im Beweise des Lehrsatzes gezeigten Kongruenz der Dreiecke die Linie af = kg = mh = ni (§. 18. Zus. IV.), so ist die Parallele bg = 2af, dann ch = 3af, und überhaupt, wenn man die Schenkel in n gleiche Theile theilet, di = n . af.

IV. Zusatz: Wenn dem Theile Aa die Parallele af entspricht, so gehört zum Theile Ab = 2Aa die Parallele bg = 2af, dann zu Ac = 3Aa die Parallele ch = 3af, und überhaupt zum n . Aa gehört

n . af, woraus folgt, daß diese Theile mit den korrespondirenden Parallelen im geraden Verhältnisse stehen (Arithm. II. §. 58. a.).

§. 81.

II. Lehrsatz:

Wenn man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallellinie zieht, so sind die abgeschnittenen Stücke der zwei übrigen Seiten unter sich, und mit den ganzen Seiten gerade proportionirt.

Beweis:

1) Würde man (Fig. 74.) im Dreiecke BAC die Seite AB in gleiche Theile theilen, und durch die Theilungspunkte mit BC Parallelen ziehen, so würde auch die Seite AC in eben so viele unter sich gleiche Theile getheilt werden (§. 80.), und die linksstehenden Theile wären mit den korrespondirenden rechtsstehenden im geraden Verhältnisse;

2) Stehen zwei Größen im geraden Verhältnisse, so sind jede zwei beliebige Theile der ersten Größe mit den korrespondirenden Theilen der andern Größe, somit jede zwei Theile von AB mit den entsprechenden Theilen von AC gerade proportionirt (§. 61. Anm.); daher erhält man die geometrische Proportion:

$$AD : DB = AE : EC;$$

3) Wenn man in dieser Proportion die Glieder eines jeden Verhältnisses addirt (Arithm. IV. §. 39. Zus. 1.), so verhält sich:

$$AD + DB : AE + EC = AD : AE,$$

und $AD + DB : AE + EC = DB : EC,$

also $AB : AC = AD : AE,$

und $AB : AC = DB : EC;$

4) Wenn man endlich das zweite Verhältniß an die Stelle des ersten schreibt, und die mittleren Glieder verwechselt (Arithm. IV. §. 38.), so erhält man die Proportionen:

$$AD : AB = AE : AC$$

und $DB : AB = EC : AC.$

Anmerkung: Wenn von nun an gesagt wird: „die Linien sind zu einander proportionirt, oder die einen Linien verhalten sich zu einander, wie die andern", so versteht sich's allezeit, daß sie zu einander gerade proportionirt sind (Arithm. II. §. 59.). Sind die Linien umgekehrt zu einander proportionirt (Arithm. II. §. 60.), so wird es allemal ausdrücklich bemerkt werden.

§. 82.

III. Lehrsatz:

Wenn man im Dreiecke zu einer Seite eine Parallele zieht, so verhält sich jedes abgeschnittene Stück der zwei übrigen Seiten zur ganzen Seite, wie die gezogene Parallele zur dritten Seite.

Beweis:

1) Man ziehe (§. 74.) von einem beliebigen Punkte der Seite AB die Linien DE mit BC, und vom Punkte E die Linie EG mit AB parallel; man erhält nach dem im §. 81. aufgestellten Lehrsatze die Proportion:

AE : AC = BG : BC;

2) Weil nach Nro. 1. die Linie DE mit BG, und EG mit DB parallel ist, so ist BG = DE (§. 41. Zus. IV.); daher

AE : AC = DE : BC,

ferner AE : AC = AD : AB (§. 81.),

also auch AD : AB = DE : BC (Arithm. IV. §. 43.).

§. 83.

IV. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke eine Linie zwei Seiten in proportionirte Theile theilet, so ist sie zur dritten Seite parallel.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 74.) im Dreiecke BAC die Linie DE so gezogen, daß AD : AB = AE : AC, oder AD : DB = AE : EC;

2) Wäre im ersten Falle DE mit BC nicht parallel, so könnte man von D aus eine andere Parallele mit BC, etwa DF ziehen, und dann würde sich AD : AB = AF : AC verhalten (§. 81.);

3) Weil nach der ersten Annahme AD : AB = AE : AC, so wäre AE : AC = AF : AC (Arithm. IV. §. 43.), und AE = AF, indem AC = AC (Arithm. IV. §. 35. Zus. III.);

4) Ist aber AE = AF, so fällt die Parallele DF, da sie mit DE die zwei Punkte D und E gemein hat, mit DE zusammen (§. 3. Zus. III.), und DE ist mit BC parallel;

5) Ist in der zweiten Voraussetzung
AD : DB = AE : EC,
so ist AD + DB : AE + EC = AD : AE (Arithm. IV. §. 39.
das ist AB : AC = AD : AE, Zus. I.),
oder AD : AB = AE : AC.

Daher ist wieder DE mit BC parallel; d. h., DE # BC, wenn AD : AB = AE : AC, oder wenn AD : DB = AE : EC.

§. 84.

V. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke eine gerade Linie einen Winkel halbirt, so sind die zwei Stücke der entgegenstehenden Seite mit den übrigen zwei Seiten proportionirt.

Beweis:

1) Man verlängere (Fig. 75.) eine Seite AC, welche dem Winkel ACB anliegt, den man durch CD halbirt hat; ferner mache man die Verlängerung CE der andern Seite CB gleich, und ziehe von B nach E die gerade Linie BE;

2) Weil CE = CB, so ist das Dreieck BCE gleichschenklicht (§. 18. b.), und dessen äußerer Winkel an der Spitze ACB, oder m + n ist = 2p = 2q (§. 43. Zus. VII.);

3) Nach der Voraussetzung hat man den Winkel

ACB halbirt, weßhalb $m = n$, und $m + n = 2m = 2n$, folglich $2m = 2q$, und $2n = 2p$, und deßhalb $m = q$, und $n = p$; ist aber $m = q$, oder $n = p$, so ist DC # BE (§. 38);

4) Weil endlich DC mit BE parallel ist, so verhält sich AD : DB = AC : CE (§. 81.), und also auch, indem CE nach Nro. 1. der Linie CB gleich gemacht wurde, AD : DB = AC : CB.

§. 85.

VI. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke eine gerade Linie eine Seite den übrigen proportionirt schneidet, so theilet sie den opponirten Winkel in zwei gleiche Theile.

Beweis:

1) Man nehme wieder (Fig. 75.) auf der verlängerten Seite AC die Linie CE = CB, und ziehe BE;

2) Nach der Voraussetzung ist
AD : DB = AC : CB,
also auch AD : DB = AC : CE,
und deßhalb DC # BE (§. 83.);

3) Weil DC mit BE parallel ist, so ist $m = q$, und $n = p$ (§. 41.), und, weil $p = q$ (§. 21. Zus. I.), der Winkel $m = n$, d. h., die gerade Linie DC, welche die Seite AB in die Theile AD und DB theilet, welche mit AC und CB proportionirt sind, theilet den opponirten Winkel ACB in zwei gleiche Theile.

§. 86.

I. Aufgabe, eine gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

I. Auflösung:

1) Man verzeichne (Fig. 73.) zur gegebenen Linie AC, welche man in gleiche Theile theilen will, einen beliebigen Winkel BAC, und trage auf dem Schenkel

AB die beliebige Länge Aa so vielmal auf, als Theile verlangt werden, etwa viermal, mithin die Theile Aa, ab, bc und cd;

2) Vom letzten Theilungspunkte d ziehe man zum Endspunkte C der auf dem andern Schenkel des Winkels aufgetragenen Linie AC die gerade Linie dC, und durch die Punkte a, b und c mit dC die Parallelen af, bg und ch;

3) Auf diese Weise hat man auf dem Schenkel AB vier gleiche Theile aufgetragen, und durch die Theilungspunkte Parallelen gezogen, weßhalb die Linie AC in vier gleiche Theile getheilt wurde (§. 80.).

II. Auflösung:

Man messe die gegebene Linie, und dividire die Zahl, welche ihre Länge angibt, durch die verlangte Anzahl der Theile; es gibt der Quotient die Größe eines Theiles im gebrauchten Maaße, den man dann auf der gegebenen Linie so vielmal aufträgt, als es die Anzahl der Theile erfordert.

Anmerkung: 1) Wie gerade Linien mittels der Skala oder des verjüngten Maaßstabes auf dem Papier, und durch Meßketten oder Stäbe auf dem Felde gemessen etc. werden, wird in der praktischen Geometrie gezeigt werden.

2) Der Anfänger kann einsweilen die Größe der gegebenen Linien in beliebigen Zahlen ausdrücken, und darnach die vorkommenden Aufgaben auflösen, indem er dann die Resultate auch in bestimmten Zahlen angibt.

§. 87.

II. Aufgabe, eine gegebene gerade Linie in mehrere Theile zu theilen, die ein bestimmtes Verhältniß haben.

I. Auflösung:

1) Man verzeichne (Fig. 76.) einen beliebigen Winkel BAC, und trage auf dem einen Schenkel AB die gegebenen Linien AD, DE und EB, welche das Verhältniß angeben, der Ordnung nach auf;

2) Auf dem andern Schenkel trage man die gege-

bene Linie AC auf, und ziehe die Linie BC, und mit dieser durch die Punkte D und E mit BC die Parallelen Dd und Ee, so verhält sich

Ad : de = AD : DE,
dann Ad : eC = AD : EB,
und de : eC = DE : EB.

Beweis:

1) Im Dreiecke AEe ist Dd parallel mit Ee gezogen, daher verhält sich (§. 81.)

Ad : de = AD : DE;

2) Aus dem nämlichen Grunde ist

Ad : Ae = AD : AE,
und Ae : eC = AE : EB,
also Ad : eC = AD : EB (Arithm. IV. §. 43.);

3) Endlich verhält sich

Ad : de = AD : DE,
und Ad : eC = AD : EB,
mithin de : eC = DE : EB (Arithm. IV. §. 43.).

II. Auflösung:

Man messe die gegebene Linie AC, und die das Verhältniß bestimmenden Linien AD, DE und EB mit einerlei Maaß, bestimme die Theile nach der im IV. Theile der Arithmetik §. 40. aufgestellten Regel, und trage die gefundenen Theile auf AC auf.

§. 88.

III. Aufgabe, zu drei gegebenen Linien die vierte geometrische Proportionallinie zu finden.

I. Auflösung:

1) Man verzeichne (Fig. 77.) einen beliebigen Winkel BAC, trage auf dem einen Schenkel AB die gegebenen Linien AD und DE, und auf dem andern Schenkel AC die dritte gegebene Linie Ad auf, und ziehe die gerade Linie Dd;

2) Durch E ziehe man zu Dd die Parallele Ee

so ist de die verlangte vierte geometrische Proportionallinie zu den drei gegebenen Linien AD, DE und Ad; weil nach dem im §. 81. aufgestellten Lehrsatze sich verhält

AD : DE = Ad : de.

II. Auflösung:

Man messe die drei gegebenen Linien durch einerlei Maaß, suche zu den gefundenen Zahlen, welche die Größe dieser Linien angeben, die vierte geometrische Proportionalzahl (Arithm. IV. §. 36.), und trage die gefundene Linie auf.

§. 89.

IV. Aufgabe, zu zwei gegebenen Linien die dritte geometrische Proportionallinie zu finden.

I. Auflösung:

1) Man verzeichne (Fig. 77.) einen beliebigen Winkel BAC, und trage auf dem einen Schenkel AB die zwei gegebenen Linien AD und DE, und auf dem andern Schenkel AC wieder die Linie DE auf, gesetzt sie reiche bis d, so daß Ad = DE;

2) Von D ziehe man zu d die gerade Linie Dd, und durch E mit Dd die Parallele Ee. Es ist jetzt de die gesuchte dritte Proportionallinie zu den zwei gegebenen Linien AD und DE; indem Ad = DE, und nach dem Lehrsatze des §. 81.

AD : DE = Ad : de,

mithin AD : DE = DE : de,

oder AD : DE : de (Arithm. IV. §. 35. Zus. I.).

II. Auflösung:

Man messe die gegebenen Linien AD und DE mit einerlei Maaß, suche zu den Zahlen, die ihre Größe ausdrücken, die dritte geometrische Proportionalzahl (Arithm. IV. §. 37.), und trage die gefundene Linie auf.

Anmerkung: Wie zu zwei gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportionallinie zu finden ist, wird im nächsten Abschnitte bei der Lehre von Verhältnissen gerader Linien im Kreise gezeigt werden.

§. 90.

VII. Lehrsatz:

Wenn in zwei geradgebrochenen Linien von gleich viel Theilen die Winkel der Ordnung nach einander gleich, und die Theile, die sie einschließen, einander proportionirt sind, so sind sie ähnlich.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 78.) die beiden gebrochenen Linien ABCDEFG und abcdefg gegeben, bei welchen die im Lehrsatze genannten Bedingungen eintreffen;

2) Die geradgebrochene Linie ist aus verschiedenen geraden Linien zusammengesetzt (§. 3. c.), und es gehört außer der geraden Richtung ihrer Theile, die bei allen die nämliche, und außer der Menge der Theile, welche in geradgebrochenen Linien von gleich viel Theilen einerlei ist, zu ihrer Qualität die Neigung der Theile gegen einander, welche die Winkel derselben bestimmen, und das geometrische Verhältniß, in welchem jeder Theil zu der andern steht (Arithm. I. §. 2. d.);

3) Also sind zwei gebrochene Linien von gleich viel Theilen von gleicher Qualität oder ähnlich (Arithm. I. §. 2. h.), wenn in beiden die Winkel der Ordnung nach gleich, und die homologen Theile, welche gleiche Winkel einschließen, zu einander proportionirt sind.

I. Zusatz: Zwei ebene geradlinigte Figuren sind ähnlich, wenn die Anzahl der Seiten in beiden einerlei ist, und sowohl die Winkel der Ordnung nach gleich, als auch jedes Paar die homologen Seiten, die gleiche Winkel einschließen, oder ihnen gegenüber stehen, zu einander proportionirt sind; indem in dieser Voraussetzung die geradgebrochenen Linien, die ihren Perimeter ausmachen (§. 12. d.), und deßhalb die ebenen geradlinigten Figuren selbst von gleicher Qua-

lität sind, welche bei ihnen in der Anzahl, der Lage und im Verhältnisse der Seiten besteht, so daß bei der einen Figur die ebene Fläche eben so begränzt ist, wie bei der andern; und umgekehrt, wenn zwei ebene geradlinigte Figuren ähnlich sind, und somit gleiche Qualität haben, so sind beide gleichnamig, und sowohl die Winkel der Ordnung nach gleich, als auch alle Paare homologer Seiten proportionirt.

II. Zusatz: Zwei ebene geradlinigte Figuren von gleich viel Seiten sind ähnlich, wenn in beiden die Winkel der Ordnung nach gleich, und alle homologen Seiten zu einander proportionirt sind (Zus. I.).

III. Zusatz: Wenn zwei ebene geradlinigte Figuren einer dritten ähnlich sind, so sind sie es auch unter sich; indem sie dann mit der dritten Figur, und deßwegen auch unter sich die nämliche Qualität haben (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.).

IV. Zusatz: Alle reguläre Figuren von gleich viel Seiten sind ähnlich.

Weil die regulären Figuren nach der Voraussetzung gleichnamig sind, das ist, gleich viel Seiten haben, so sind alle Winkel der einen Figur den Winkeln der andern gleich, indem jeder nach dem im §. 53. aufgestellten Zusatze gleich $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ ist. Ueberdieß sind in jeder einzelnen Figur alle Seiten einander gleich, und es ist sowohl in der einen als in der andern Figur das Verhältniß jeder zwei Seiten ein Verhältniß der Gleichheit (Arithm. II. §. 50. b.), da jede zwei Seiten der einen mit jeden zwei Seiten der andern proportionirt, und somit die Figuren ähnlich sind (Zus. II.).

Anmerkung: Es ist bequem, wenn man zwei ähnliche geradlinigte Figuren der Ordnung nach mit den nämlichen Buchstaben, die eine mit den großen, die andere mit den kleinen, bezeichnet, so daß die nämlichen Winkel, und die homologen Seiten die nämlichen Buchstaben erhalten. Will man die auf diese Weise bezeichneten Seiten und Winkel in der Aussprache unterscheiden, so sagt man z. B. die Seite AB groß, und die Seite ab klein, dann der Winkel A groß, und der Winkel a klein rc.

§. 91.

VIII. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele gezogen wird, so ist das kleinere Dreieck dem größeren ähnlich.

Beweis:

1) Wird (Fig. 74.) im Dreiecke ABC die Linie DE mit BC parallel gezogen, so ist der Winkel ADE = ABC, und AED = ACB (§. 41.), und zugleich ist der Winkel A für das Dreieck DAE und für BAC ein gemeinschaftlicher Winkel und daher A = A;

2) Weil DE mit BC parallel gezogen wurde (Nro. 1.), so sind nach den in den §§. 81. und 82. aufgestellten Lehrsätzen folgende Proportionen richtig:

AD : AB = AE : AC,
dann AD : AB = DE : BC,
und AE : AC = DE : BC.

Es sind also in diesen beiden Dreiecken alle Winkel der Ordnung nach gleich, und alle homologen Seiten, die gleiche Winkel einschließen, oder gleichen Winkeln gegenüber stehen, zu einander proportionirt, und das kleinere Dreieck ADE ist dem größern BAC ähnlich (§. 90. Zus. II.).

Anmerkung: Man kann, um die möglichen Verhältnisse der homologen Seiten auszudrücken, entweder die Proportionen nach der Ordnung der Winkel ansetzen, und allemal zwei Seiten, die einen Winkel einschließen, im Verhältnisse mit einander vergleichen, oder die Verhältnisse nach Seiten, die gleichen Winkeln opponirt sind, bestimmen; man erhält in beiden Fällen alle möglichen Verhältnisse der homologen oder gleichnamigen Seiten, indem sich die drei Seiten eines Dreieckes zu drei Paaren verbinden lassen (Arithm. IV. §. 94.), und deßhalb drei Verhältnisse geben. Werden nun die drei Verhältnisse der Seiten des einen Dreieckes mit den drei Verhältnissen des andern verglichen, so erhält man drei Proportionen (Arithm. II. §. 51.), welche alle möglichen Verhältnisse der homologen Seiten darstellen.

§. 92.

IX. Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken der Ordnung nach alle Winkel gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 79.) in den beiden Dreiecken ABC und abc alle Winkel der Ordnung nach einander gleich, somit A = a, dann B = b, und C = c;

2) Man nehme auf der Seite AB des Dreieckes ABC die Linien AD = ab, und ziehe DE zu BC parallel, es ist nach dem Lehrsatze des vorigen §. das Dreieck ADE ähnlich dem Dreiecke ABC, oder ADE ∽ ABC (Arithm. I. §. 9. Nro. 4.);

3) Weil DE zu BC parallel gezogen wurde, so ist der Winkel D = B (§. 41.), und nach der Voraussetzung B = b, also D = b; ferner der Winkel A = a, und nach Nro. 2. ist die Seite AD = ab, mithin das Dreieck ADE mit abc kongruent (§. 22.), oder △ ADE ≌ △ abc;

4) Kongruente Größen sind von einerlei Quantität und Qualität zugleich (Arithm. I. §. 2. h.), und deßwegen die Dreiecke ABC und abc ähnlich, da sie es mit dem Dreiecke ADE sind (§. 90. Zus. III.).

Zusatz: Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel gleich sind, so ist auch der dritte Winkel des einen Dreieckes dem dritten des andern gleich (§. 43. Zus. II.), und die Dreiecke sind nach dem aufgestellten Lehrsatze einander ähnlich.

§. 93.

X. Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel gleich ist, und die beiden einschließenden Seiten proportionirt sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 79.) in den beiden Dreiecken bac

und BAC der Winkel a = A, und es verhalte sich ab : AB = ac : AC;

2) Man nehme auf der Seite *AB* die Linie *AD* = ab, und auf der Seite *AC* des Dreieckes *BAC* die Linie *AE* = ac, und ziehe die gerade Linie *DE*;

3) Nach der Voraussetzung verhält sich ab : *AB* = ac : *AC*, und also auch, weil ab = *AD*, und ac = *AE*, die Linie *AD* : *AB* = *AE* : *AC*, weßhalb DE zu BC parallel ist (§. 83.), und das Dreieck *ADE* dem Dreiecke *ABC* ähnlich ist (§. 91.), oder △*ADE* ∽ △*ABC*;

4) Nach der Annahme (per hyp.) ist der Winkel A = a, dann nach Nro. 2. ist *AD* = ab, und *AE* = ac, also das Dreieck *ADE* mit dem Dreiecke abc kongruent (§. 20.), somit auch △*ADE* ≌ △abc, woraus nach Nro. 3. folgt, daß △abc ≌ △*ADC*.

§. 94.

XI. Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten proportionirt sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 79.) in den beiden Dreiecken abc und *ABC* alle Seiten einander proportionirt, somit

ab : *AB* = ac : *AC*,
dann ab : *AB* = ab : *BC*,
und ac : *AC* = bc : *BC*;

2) Man nehme auf der Seite *AB* des Dreieckes *ABC* die Linie *AD* = ab, und auf *AC* die Linie *AE* = ac, und ziehe von D nach E die gerade Linie DE;

3) In der bei Nro. 1. vorausgesetzten ersten Proportion setze man *AD* anstatt ab, und *AE* anstatt ac, man findet, daß *AD* : *AC* = *AE* : *AC*, weßhalb DE zu BC parallel (§. 83.), und das Dreieck *ADE* dem Dreiecke *ABD* ähnlich ist (§. 91.);

4) Nach der Voraussetzung bei Nro. 1. verhält

sich $ab : AB = bc : BC$, und, weil $AD = ab$ gemacht wurde,

$AD : AB = bc : BC$,
ferner $AD : AB = DE : BC$ (§. 82.),

also $bc : BC = DE : BC$ (Arithm. IV. §. 43.),
und $bc = DE$, gleichwie $BC = BC$ (Arithm. IV. §. 35. Zus. III.);

5) Nach Nro. 2. ist $AD = ab$, und $AE = ac$, und nach Nro. 4. ist $DE = bc$, weßhalb $\triangle ADE \cong \triangle abc$, und daher nach Nro. 3. auch abc ähnlich dem Dreiecke *ABC*.

§. 95.

XII. Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten proportionirt sind, und ein Winkel gleich ist, der der größern dieser beiden Seiten gegenüber steht, so sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 80.) in den Dreiecken abc und *ABC* der Winkel $b = B$, dann die Seite ac größer als ab, und *AC* größer als *AB*, und es verhalte sich $ab : AB = ac : AC$;

2) Man mache auf der Seite *AB* des Dreieckes *ABC* die Linie $DB = ab$, und ziehe durch D die Linie DE zu *AC* parallel, so ist $\triangle BDE \sim ABC$ (§. 91.);

3) Nach der Voraussetzung ist

$ab : AB = ac : AC$,
und $DB : AB = DE : AC$ (§. 82.),

mithin $DB : ab = DE : ac$ (Arithm. IV. §. 43.),
und $DE = ac$, gleichwie $DB = ab$ (Arithm. IV. §. 35. Zus. II.);

4) In den beiden Dreiecken DBE und abc ist jetzt $DB = ab$, dann $DE = ac$, und $B = b$; daher ist $\triangle DBE \cong \triangle abc$ (§. 34.), also $\triangle DBE \sim \triangle abc$; nach Nro. 2. ist $\triangle DBE \sim \triangle ABC$; mithin ist auch $\triangle abc \sim \triangle ABC$ (§. 90. Zus. III.).

Zu-

Zusatz: Zwei rechtwinklichte Dreiecke sind ähnlich, wenn ein Perpendikel, und die Hypotenuse einander proportionirt sind, weil bei ihnen die rechten Winkel, welche den größern Seiten — den Hypotenusen, gegenüber stehen, einander gleich sind.

Anmerkung: Man vergleiche die hier in den §§. 92, 93, 94 und 95. über die Aehnlichkeit der Dreiecke aufgestellten Lehrsätze mit den über die Kongruenz der Dreiecke in den §§. 20, 22, 24 und 34. angeführten Lehrsätzen.

§. 96.

XIII. Lehrsatz:

Wenn man im rechtwinklichten Dreiecke vom rechten Winkel auf die Hypotenuse ein Perpendikel zieht, so sind die zwei neuen Dreiecke dem ganzen Dreiecke und unter sich ähnlich.

Beweis:

1) Man ziehe (Fig. 81.) im rechtwinklichten Dreiecke ABC vom rechten Winkel B auf die Hypotenuse AC das Perpendikel BD;

2) Es ist der Winkel ABC als ein rechter Winkel dem rechten Winkel q gleich, und der Winkel BAD ist gleich dem Winkel BAC, da der Winkel A den beiden Dreiecken BAD und BAC gemeinschaftlich ist, weßhalb $\triangle$ BAD $\backsim$ BAC (§. 92. Zus.);

3) Eben so ist auf der andern Seite der rechte Winkel ABC = q, und BCD = BCA wegen des gemeinschaftlichen Winkels bei C; um deßwillen ist auch $\triangle$ BDC $\backsim$ ABC;

4) Sind zwei Dreiecke einem dritten ähnlich, so sind sie es auch unter sich (§. 90. Zus. III.); daher ist $\triangle$ BAD $\backsim$ BDC, d. h., die auf diese Weise erhaltenen zwei neuen Dreiecke sind dem ganzen Dreiecke, und unter sich ähnlich.

I. Zusatz: Wenn man im rechtwinklichten Dreiecke vom rechten Winkel auf die Hypotenuse ein Perpendikel zieht, so ist solches die mittlere geometrische Proportionallinie zu den abgeschnittenen Stucken der Hypotenuse.

Denn zieht man (Fig. 81.) im rechtwinklichten Dreiecke ABC vom rechten Winkel B auf die Hypotenuse das Perpendikel BD, so ist nach dem hier aufgestellten Lehrsatze das Dreieck BAD dem Dreiecke BDC ähnlich; daher verhält sich AD : BD = BD : DC (§. 90. Zus. I.), oder kürzer AD : BD : BC, indem in diesen ähnlichen Dreiecken die Seiten AD und BD den gleichen Winkeln m und C, und die Seiten BD und DC den gleichen Winkeln A und n gegenüber stehen, und deßhalb homologe oder gleichnamige Seiten sind.

II. Zusatz: Zieht man im rechtwinklichten Dreiecke vom rechten Winkel auf die Hypotenuse ein Perpendikel, so ist jeder Kathetus des ganzen Dreieckes die mittlere geometrische Proportionallinie zu dem anliegenden Stücke der Hypotenuse, und zur ganzen Hypotenuse.

Denn (Fig. 81.) ist BD perpendikulär auf AC, und ABC ein rechter Winkel, so ist nach dem Lehrsatze △ ABD ∽ △ ABC, und BDC ∽ ABC, und daher verhält sich (§. 90. Zus. I.)

AD : AB = AB : AC,
und DC : BC = BC : AC,
oder AD : AB : AC,
und DC : BC : AC,

§. 97.

XIV. Lehrsatz:

Wenn man im rechtwinklichten Dreiecke alle drei Seiten mit einerlei Maaße mißt, und dadurch ihre Größe in Zahlen ausdrückt, so ist die Quadratzahl der Hypotenuse den Quadratzahlen der beiden Katheten gleich, oder kürzer, das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Perpendikel.

Beweis:

1) Man ziehe (Fig. 81.) im rechtwinklichten Dreiecke ABC vom rechten Winkel B auf die Hypotenuse

das Perpendikel BD, es verhält sich nach dem II. Zusatze des vorigen §.

$$AD : AB : AC,$$
$$\text{und } DC : BC : AC;$$

2) Man verwandle diese stätigen geometrischen Proportionen in Gleichungen (Arithm. IV. §. 35. Zus. V.), und addire die letztern (Arithm. I. §. 25. I.):

$$AD \times AC = AB^2,$$
$$\text{und } DC \times AC = BC^2,$$
$$\text{also } AD \times AC + DC \times AC = AB^2 + BC^2;$$

3) Die beiden Summanden auf der ersten Seite der letzten Gleichung löse man in Faktoren auf (Arithm. III. §. 87. IV.), und setze dann anstatt $AD + DC$ das Ganze AC; es ist

$AD \times AC + DC \times AC = (AD + DC) \times AC = AC \times AC = AC^2$, und deßhalb $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

I. Zusatz: Umgekehrt, wenn in einem Dreiecke die drei Seiten, durch einerlei Maaß bestimmt, so beschaffen sind, daß das Quadrat einer Seite der Summe der Quadrate der beiden übrigen gleich ist, so ist das Dreieck rechtwinklicht.

Es sei (Fig. 117.) im Dreiecke ACB die Quadratzahl der Seite BC oder $CB^2 = AC^2 + AB^2$, und man errichte am Punkte A auf AB das Perpendikel DA (§. 45.), welches man gleich AC macht, so daß $AD = AC$ ist; also auch $AD^2 = AC^2$ (Arithm. III. §. 70. I.); ferner ist nach dem Lehrsatze

$$BD^2 = DA^2 + AB^2, \text{ und, weil } AD^2 = AC^2,$$
$$BD^2 = AC^2 + AB^2, \text{ dann nach der Annahme ist}$$
$$CB^2 = AC^2 + AB^2,$$

also ist $BD^2 = CB^2$, und $BD = CB$ (Arithm. III. §. 70. I.).

Es ist jetzt $DB = BC$, dann $AC = AD$ (ex construct.), und $AB = AB$, also ist $\triangle ADB \cong \triangle ACB$ (§. 24.), und der Winkel $m = n = 90$ Grad (§. 18. Zus. IV. und §. 8. c.), d. h., das Dreieck ABC ist rechtwinklicht, und der Winkel n oder BAC, welcher der Seite BC gegenüber steht, ist ein rechter Winkel, wenn $CB^2 = AB^2 + AC^2$.

II. Zusatz: Man bekömmt im rechtwinklichten

Dreiecke das Quadrat eines Katheten, wenn man vom Quadrate der Hypothenuse das Quadrat des andern Katheten abzieht; denn nach dem Lehrsatze ist (Fig. 81.)

$AC^2 = AB^2 + BC^2$,

also $AC^2 - BC^2 = AB^2$,

und $AC^2 - AB^2 = BC^2$ (Arithm. III. §. 96. Zus. I.).

III. Zusatz: Im rechtwinklichten Dreiecke ist jeder Kathetes die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Summe, und der Differenz der beiden übrigen Seiten.

Denn nach dem II. Zusatze ist (Fig. 81.)

$AB^2 = AC^2 - BC^2$,

und $BC^2 = AC^2 - AB^2$,

daher $AB^2 = (AC + BC) \times (AC - BC)$ } (Arithm. III.

und $BC^2 = (AC + AB) \times (AC - AB)$ } §.87. Zus. VI.)

weßhalb $AC + BC : AB : AC - BC$ } (Arithm. IV. §.

und $AC + AB : BC : AC - AB$ } 35. Zus. VII.)

Anmerkung: Der in diesem §. aufgestellte XIV. Lehrsatz, welcher wegen seines großen Einflusses in alle Theile der reinen und angewandten Mathematik Magister Matheseos heißt, wird von seinem Erfinder, dem griechischen Weltweisen Pythagoras, gewöhnlich der pythagorische Lehrsatz genannt. Man hat mehr als vierundzwanzig Beweisarten, um seine Evidenz zu zeigen; wovon in der Folge in diesem Lehrbuche an den geeigneten Stellen noch mehrere vorkommen werden.

§. 98.

V. Aufgabe, zu zwei gegebenen Seiten eines rechtwinklichten Dreieckes die dritte Seite zu finden.

I. Auflösung:

1) Man verzeichne einen rechten Winkel, trage auf den Schenkeln, im Falle die Hypotenuse gesucht wird, die beiden gegebenen Katheten auf, und verbinde die erhaltenen Durchschnittspunkte durch eine gerade Linie, so ist diese die gesuchte Hypotenuse;

2) Wird aber ein Kathetus gesucht, so trage man auf einem Schenkel des gezeichneten rechten Winkels den andern gegebenen Kathetus auf, beschreibe vom Durchschnittspunkte als Zentrum einen Kreisbogen mit der als Radius angenommen gegebenen Hypotenuse, bis der andere Schenkel geschnitten wird, es ist jezt das bestimmte Stück dieses leztern vom Scheitel des rechten Winkels bis zum neuen Durchschnittspunkte der verlangte Kathetus.

II. Auflösung:

1) Wird die Hypotenuse gesucht, so messe man die beiden gegebenen Katheten mit dem nämlichen Längenmaaße, ziehe aus der Summe der Quadrate der beiden Zahlen, welche die Größe der Katheten angeben, die Quadratwurzel aus, so gibt diese die Größe der verlangten Hypotenuse im nämlichen Längenmaaße an;

2) Sucht man aber einen Kathetus, so messe man die Hypotenuse, und den gegebenen andern Kathetus mit dem nämlichen Längenmaaße, subtrahire die Quadratzahl des Kathetus von der Quadratzahl der Hypotenuse, und ziehe aus der Differenz die Quadratwurzel aus.

I. Beispiel:

Es sei (Fig. 81.) zu den zwei gegebenen Katheten BD und DC die Hypotenuse zu finden.

I. Auflösung:

Man verzeichne den rechten Winkel BDC, trage auf dem einen Schenkel den Kathetus BD, und auf dem andern den Kathetus DC auf, und verbinde die Punkte B und C durch die gerade Linie BC, so ist diese die verlangte Hypotenuse.

II. Auflösung:

Man messe die Linien BD und DC mit dem nämlichen Längenmaaße, gesezt BD habe 3, und DC

habe 4 Schuh, erhebe diese Zahlen zum Quadrate (Arithm. III. §. 27.), addire die beiden Quadrate 9 und 16, und ziehe aus der Summe 25 die Quadratwurzel aus (Arithm. III. §. 29.), man erhält zur Wurzel 5, weßhalb die Länge der Hypotenuse 5 Schuh beträgt.

II. Beispiel:

Man suche (Fig. 81.) zu der Hypotenuse BC und dem Kathetus BD den andern Kathetus.

I. Auflösung:

Man verzeichne einen rechten Winkel, trage auf dem einen Schenkel den gegebenen Kathetus BD auf, und beschreibe von B aus mit der Hypotenuse BC einen Kreisbogen, bis dieser den andern Schenkel des rechten Winkels im Punkte C schneidet; es ist jetzt die bestimmte Linie DC der verlangte Kathetus.

II. Auflösung:

Man messe die Linien BC und BD mit dem nämlichen Längenmaaße, gesetzt BC habe 5, und BD habe 3 Schuh, erhebe diese Zahlen zum Quadrate, ziehe das Quadrat 9 vom Quadrat 25 ab, und ziehe aus dem Reste 16 die Quadratwurzel aus; die gefundene Wurzel 4 gibt die gesuchte Länge des andern Kathetus in Schuhen.

Anmerkung: Hat man drei Linien, von welchen die erste 3, die zweite 4, und die dritte 5 Schuh hat, die sich demnach verhalten, wie die Zahlen 3, dann 4, und 5, und verbindet man sie zu einem Dreiecke (§. 19.), so erhält man nach dem I. Zusatze dieses §. ein rechtwinklichtes Dreieck, wo der der Seite 5 opponirte Winkel ein rechter Winkel ist, indem $5^2 = 3^2 \times 4^2 = 25$.

Außer diesen drei Zahlen 3 „ 4 und 5, und ihren Vielfachen 3n, 4n und 5n, z. B. 6 „ 8 und 10, oder 9 „ 12 und 15 ꝛc. gibt es noch unbestimmbar viele Zahlen, welche die Größe dreier Linien ausdrücken können, die allemal ein rechtwinklichtes Dreieck geben; z. B. 5 „ 12 und 13, da $13^2 = 12^2 \times 5^2 = 169$.

§. 99.

XV. Lehrsatz:

Wenn man in ähnlichen Dreiecken ein Paar homologer Seiten zu Grundlinien annimmt, und von den Spitzen die Höhen zieht, so verhalten sich die Grundlinien, wie die Höhen.

Beweis:

1) Man nehme (Fig. 82.) in den beiden ähnlichen Dreiecken ABC und abc die homologen Seiten AC und ac zu Grundlinien an, und ziehe von den Spitzen B und b die Höhen BD und bd (§. 33.);

2) Es ist der Winkel m gleich dem rechten Winkel p, da die Höhen auf die Grundlinien perpendikulär stehen (§. 18. f.), und der Winkel A ist gleich dem homologen Winkel a, weil die beiden Dreiecke einander ähnlich sind (§. 90. Zus. I.), weßhalb das Dreieck BAD dem Dreiecke bad ähnlich ist (§. 92. Zus.), und also

BA : ba = BD : bd,

ferner per hyp. ist BA : ba = AC : ac,

folglich AC : ac = BD : bd (Arithm. IV. §. 43.).

Das heißt, in dieser Voraussetzung sind die Grundlinien mit den Höhen proportionirt.

§. 100.

XVI. Lehrsatz:

Aehnliche geradlinigte Figuren werden durch ähnliche Diagonalen der Ordnung nach in lauter ähnliche Dreiecke getheilt.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 78.) die beiden Siebenecke ähnliche Figuren, und man ziehe von den homologen Winkeln A und a die ähnlichen Diagonalen AC und ac, dann AD und ad rc. zu allen übrigen Ecken;

2) Nach der Annahme sind die beiden Vielecke ähnlich, mithin der Winkel B = b, und AB : ab = BC : bc

(§. 90. Zus. I.), weßhalb das Dreieck ABC dem Dreiecke abc ähnlich ist (§. 93.);

3) Bei diesen ähnlichen Vielecken ist der Winkel BCD = bcd, und nach Nro. 2. ist der Winkel h = m, also BCD — h = bcd — m (Arithm. I. §. 34. I.) oder ACD = acd;

dann per hyp. ist BC : bc = CD : cd,
und nach Nro. 2. ist BC : bc = AC : ac,

also CD : cd = AC : ac (Arithm. IV. §. 43.).

Daher ist das Dreieck ACD dem Dreiecke acd ähnlich (§. 93.).

4) Auf eine ähnliche Weise läßt sich der Beweis für jedes folgende Dreieck fortsetzen; es werden demnach ähnliche geradlinigte Figuren durch ähnliche Diagonalen der Ordnung nach in lauter ähnliche Dreiecke getheilt.

Zusatz: Wenn zwei geradlinigte Figuren aus einer gleichen Anzahl ähnlicher Dreiecke der Ordnung nach zusammengesetzt sind, so daß jedes Dreieck mit dem folgenden eine Seite gemein hat, so sind die Figuren ähnlich.

Finden (Fig. 78.) bei den beiden Siebenecken, welche von den Ecken A und a aus durch Diagonalen in Dreiecke getheilt sind, diese Bedingungen Statt, so haben die Figuren gleich viele Seiten; ferner sind dann wegen der Gleichheit der Dreieckswinkel alle ihre Winkel der Ordnung nach gleich, und alle homologen Seiten zu einander proportionirt, weßhalb solche Figuren ähnlich sind (§. 90. Zus. I.).

§. 101.

XVII. Lehrsatz:

In ähnlichen geradlinigten Figuren verhalten sich die Perimeter, wie jedes Paar homologer Seiten, oder wie jedes Paar homologer Diagonalen.

Beweis:

1) Man theile (Fig. 78.) die beiden ähnlichen Figuren ABCDEFG und abcdefg durch ähnliche Diagonalen in ähnliche Dreiecke (§. 100.);

2) Weil die Figuren ähnlich sind, so sind die homologen Seiten zu einander proportionirt (§. 90. Zus. I.), mithin AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EF : ef = FG : fg = GA : ga;

3) Bei gleichen geometrischen Verhältnissen verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede (Arithm. IV. §. 39. Zus. II.), daher ist (AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA) : (ab + bc + cd + de + ef + fg + ga) = AB : ab = BC : bc ꝛc.

4) Die Summe der Vorderglieder gibt den Perimeter der ersten Figur, und die Summe der Hinterglieder gibt den Perimeter der zweiten Figur (§. 12. d.), deßwegen ist

PER : per. = AB : ab = BC : bc ꝛc.;

5) Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke verhält sich

AB : ab = AC : ac,

dann CD : cd = AD : ad ꝛc.

folglich auch PER : per. = AC : ac = AD : ad ꝛc.

Das ist, in ähnlichen, geradlinigten Figuren verhalten sich die Perimeter, wie jedes Paar homologer Seiten, oder homologer Diagonalen.

Anmerkung: 1) Will man überhaupt zwei ähnliche Dreiecke verzeichnen, so darf man nur auf einer kleinern oder größern Grundlinie zwei Winkel verzeichnen, die den Winkeln des andern Dreieckes gleich sind (§. 25.), die beiden andern Schenkel stoßen allemal in einem Punkte zusammen (§. 28. Zus. II. u. §. 40.), und das erhaltene neue Dreieck ist dem vorigen ähnlich. Auf diese Weise wird (Fig. 82.) auf ac das Dreieck abc ähnlich dem Dreiecke ABC beschrieben, wenn der Winkel a = A, und c = C gemacht wird.

2) Will man (Fig. 78.) über eine gegebene Linie ag eine Figur verzeichnen, welche dem Siebenecke ABCDEFG ähnlich ist, so ziehe man aus A zu den übrigen Ecken die möglichen Diagonalen, und mache der Ordnung nach das Dreieck agf ähnlich dem Dreiecke AGF, dann das Dreieck afe ähnlich dem Dreiecke AFE ꝛc., so erhält man die neue ähnliche Figur (§. 100. Zus. I.).

2) Wie mittels der Proportionallinien ähnliche Figuren gezeichnet werden, wird später beim Gebrauche des verjüngten Maaßstabes gezeigt werden (§. 86. Anm. 1.)

II. Abschnitt.

Vom Verhältnisse gerader Linien im Kreise.

§. 102.

I. Lehrsatz:

Wenn man aus einem beliebigen Punkte der Peripherie eines Kreises ein Perpendikel auf den Durchmesser, oder von einem beliebigen Punkte des Diameters ein Perpendikel an die Peripherie zieht, so ist solches die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den Segmenten des Diameters.

Beweis:

1) Man ziehe (Fig. 83.) von dem Endspunkte D des Perpendikels DE zu den Endspunkten des Diameters AB die Sehnen DA und DB; es ist der Winkel ADB ein rechter Winkel (§. 71. Zus. III.), und DE ein aus dem rechten Winkel auf die Hypotenuse gezogenes Perpendikel;

2) Daher verhält sich $AE:ED = ED:EB$ (§. 96. Zus. I.), oder $AE:ED:EB$, d. h., das Perpendikel ED, welches von einem Punkte der Peripherie auf den Durchmesser, oder von diesem zur Peripherie gezogen wird, ist die mittlere geometrische Proportionallinie zu den Stücken oder Segmenten des Durchmessers.

I. Zusatz: Da man (Fig. 83.) im Durchmesser AB jeden beliebigen Punkt annehmen, und davon zur Peripherie ein Perpendikel ziehen kann, so sind die Segmente AE und DE veränderliche Größen, man setze also $AE = x$, dann $DE = y$, und den unveränderlichen Durchmesser $AB = a$ (Arithm. III. §. 43. d.); so wird das andere Segment $EB = AB - AE = a - x$,

und die stätige geometrische Proportion AE:ED:EB verwandelt sich rücksichtlich der Bezeichnung der Linien in die Proportion $x:y:a-x$, wo nach der im IV. Theile der Arithmetik §. 35. Zus. V. aufgestellten Regel das Quadrat des mittleren Gliedes dem Produkte der äußeren Glieder gleich ist, mithin $y^2 = ax - x^2$.

II. Zusatz: Man nennt (Fig. 83.) den Durchmesser AB oder a die Abszissenlinie der beiden Stücke desselben, nämlich AE und EB oder x und $a-x$ die Abszissen, und das Perpendikel DE oder y die rechtwinklichte Ordinate oder bloß die Ordinate des Kreises.

Es ist demnach, da nach dem I. Zusatze $y^2 = ax - x^2$, das Quadrat der Ordinate des Kreises gleich dem Produkte aus den dazu gehörigen Abszissen des Diameters; daraus läßt sich für einen angenommenen Halb- oder Durchmesser des Kreises für jede beliebige Abszisse die entsprechende Ordinate, und für jede Ordinate die Abszisse berechnen.

a) Setzt man die Abszisse $x = o$, und dann $x = a$, so ist $y^2 = a \times o - o = o$, und $y^2 = a \times a - a^2 = a^2 - a^2 = o$, also $y = o$, das ist, am Anfangspunkte A, und am Endspunkte B des als Abszissenlinie angenommenen Diameters AB ist die Ordinate gleich Null.

b) Setzt man die Abszisse x gleich dem Radius des Kreises, also $= \frac{1}{2}a$, so ist $y^2 = a \times \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$, mithin $y = \pm \frac{1}{2}a$ (Arithm. IV. §. 20.); das ist, im Mittelpunkte des Durchmessers ist die Ordinate des Kreises dem Halbmesser gleich, und es gibt im Zentrum die Ordinate $+\frac{1}{2}a$, und $-\frac{1}{2}a$, somit zwei dem Radius gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten, von welchen die eine positiv, und die andere negativ, und die Richtung nach unten hat, im Falle die andere die Richtung nach oben hat.

c) Setzt man umgekehrt die Ordinate $y = o$, und sucht man die Abszisse x, so ist $o = ax - x^2$, und

$x = \pm \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$ (Arithm. IV. §. 21.); nimmt man die positive Wurzel $+\frac{1}{2}a$, so ist $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$, und nimmt man die negative Wurzel $-\frac{1}{2}a$, so ist $x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = 0$; d. h., wenn die Ordinate gleich Null ist, so ist die Abszisse auch gleich Null, oder gleich dem Durchmesser, und es gibt am Anfangspunkte, und am Endspunkte des Diameters eine solche Ordinate.

d) Setzt man endlich die Ordinate $y = \frac{1}{2}a$, und sucht man x, so ist $\frac{1}{4}a^2 = ax - x^2$, und $x = \frac{1}{2}a$, d. h., wenn die Ordinate dem Radius gleich ist, so beträgt auch die entsprechende Abszisse einen Halbmesser.

Anmerkung: 1) Die Lage eines jeden Punktes der Peripherie des Kreises ist durch die Größe der entsprechenden Abszisse und Ordinate bestimmt, und die Gleichung $y^2 = ax - x^2$, welche das Verhältniß der Ordinaten und Abszissen für jeden Punkt der Peripherie angibt, wird die Gleichung des Kreises genannt.

2) Um die Anfänger durch die Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie im algebraischen Kalkul zu üben, führte ich hier mittels der aufgelösten quadratischen Gleichungen die verschiedenen Werthe für die Ordinaten und Abszissen an; man ersieht daraus, in wie ferne der bei der Ausziehung der Quadratwurzel gefundene doppelte Werth, der positive und der negative (Arithm. III. §. 73. Zus. I.), einen bestimmten Sinn hat.

3) Man hüte sich vor folgendem Schein- (Trug)-schlusse:

$$y^2 = ax - x^2;\ y = \pm\sqrt{ax - x^2};$$

$$y = -\sqrt{ax - x^2};\ y^2 = \sqrt{x^2 - ax}.$$

Wenn man in $y = \sqrt{x^2 - ax}$ die Abszisse $x = 0$, und dann $x = a$ setzt, so wird freilich $y = \sqrt{0^2 - a \cdot 0} = 0$, und $y = \sqrt{a^2 - a \cdot a} = \sqrt{a^2 - a^2} = 0$. Aber wenn man $x = \frac{1}{2}a$ setzt; so wird

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - a \cdot \tfrac{1}{2}a} = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}a^2} = \sqrt{-\tfrac{1}{4}a^2}.$$

Dieß ist falsch, weil bei $x = \frac{1}{2}a$ die Ordinate $y = \pm \frac{1}{2}a$, daher nicht unmöglich, also nicht $= \sqrt{-\frac{1}{4}a^2}$.

4) Der Herr Baron v. Wolf führt folgende Kreisgleichung auf:

$$y^2 = a^2 - x^2.$$

Er setzt nämlich (Fig. 83.) AC = CB = a, denkt sich die Linie CD, nimmt x von C aus nach A, so daß CE = x, und AE = a − x = AC − EC wird, und setzt an:

BC + CE : y : AE; $a + x : y : a - x$;
$y^2 = (a + x)(a - x)$; $y^2 = a^2 - x^2$.

5) $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$; wenn in Wolfs Gleichung $x = 0$ ist, so wird $y = \pm a$; ist aber $x = a$, so wird $y = 0$. Man hüte sich auch hier vor dem Fehlschlusse: $y = \sqrt{x^2 - a^2}$; wenn $a = x$, so ist zwar $y = 0$; allein wenn $x = 0$, so wäre $y = \sqrt{-a^2}$, also unmöglich, was falsch ist, da für $x = 0$ das $y = \pm a$, also möglich ist.

§. 103.

I. Aufgabe, zu zwei gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportionallinie zu finden.

I. Auflösung:

1) Es seien (Fig. 83.) die beiden Linien AE und EB gegeben, und man soll zu ihnen die mittlere geometrische Proportionallinie finden;

2) Man trage diese beiden Linien neben einander auf einer geraden Linie auf, so daß AB die Summe beider ausdrückt, und deßhalb = AE + EB;

3) Man halbire die Linie AB (§. 27.), und beschreibe vom Mittelpunkte C aus mit dem Halbmesser CA, der die Hälfte von AB ist, einen Kreis;

4) Man errichte vom Punkte E zur Peripherie des Kreises das Perpendikel ED (§. 32.), so ist dieses

die verlangte mittlere geometrische Proportionallinie zu den gegebenen Linien AE und EB, da sich nach §. 102. verhält

AE:ED:EB.

II. Auflösung:

Man messe die gegebenen Linien *AE* und *EB* mit dem nämlichen Längenmaaße, und drücke so ihre Größe in Zahlen aus; ferner suche man zu diesen beiden Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl (Arithm. IV. §. 37.), so gibt diese die Größe der gesuchten mittleren Proportionallinie an, welche dann nach dem nämlichen Maaße aufgetragen wird.

§. 104.

II. Lehrsatz:

Wenn sich im Kreise zwei Sehnen durchschneiden, so sind die abgeschnittenen Stücke umgekehrt zu einander proportionirt.

Beweis:

1) Man verbinde (Fig. 84.) die Endspunkte der Sehnen *AB* und *CD*, welche sich im Punkte *E* schneiden, durch die Sehnen *AC* und *DB*;

2) Die Winkel *A* und *D* sind Peripheriewinkel, und stehen auf dem nämlichen Bogen *CB* auf, weßhalb der Winkel $A=D$ (§. 71. Zus. II.);

3) Eben so sind die Winkel *C* und *B* Peripheriewinkel und stehen auf dem Bogen *AD* auf, weßhalb der Winkel $C=B$;

4) Es sind also die Dreiecke *DEB* und *AEC* ähnlich (§. 92. Zus.), und es verhält sich $AE:EC=ED:EB$, da die Seiten *AE* und *ED* den gleichen Winkeln *C* und *B*, und *EC* und *EB* den gleichen Winkeln *A* und *D* gegenüber stehen;

5) Weil endlich dem ersten Gliede *AE* in der Proportion das vierte Glied *EB*, und dem zweiten *EC* das dritte *ED* entspricht, so sind die abgeschnittenen

Stücke der Sehnen, die sich durchschneiden, zu einander umgekehrt proportionirt (Arithm. II. §. 60.).

§. 105.

III. Lehrsatz:

Im Kreise liegt von zwei ungleichen Sehnen die größere dem Mittelpunkte näher, und umgekehrt, wenn zwei Sehnen ungleich vom Mittelpunkte entfernt sind, so ist jene größer, die dem Zentrum näher liegt.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 85.) die Sehne AB größer als DE, so ist $\frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}DE$, oder $AG > DF$, da die von des Kreises Mittelpunkte gezogenen Perpendikel CG und CF die Entfernungen der Sehnen vom Zentrum angeben, und die Sehnen halbiren (§. 56.);

2) Der Radius AC ist gleich dem Halbmesser DC (§. 14. Zus. IV.), somit Arithm. III. §. 70. I.)

$AC^2 = DC^2$,
dann $AG^2 > DF^2$,

also $AC^2 - AG^2 < DC^2 - DF^2$ (Arithm. I. §. 34. III.),
oder $CG^2 < CF^2$ (§. 97. Zus. II.),
und $CG < CF$.

Das ist, die größere Sehne liegt dem Mittelpunkte näher, als die kleinere.

3) Ist umgekehrt $CG < CF$, so ist CG^2 kleiner als CF^2; ferner

$AC^2 = CD^2$,
dann $CG^2 < CF^2$,

also $AC^2 - CG^2 > CD^2 - CF^2$,
oder $AG^2 > DF^2$,
und $AG > DF$,
das ist $\frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}DE$,
folglich $AB > DE$.

Das heißt, jene Sehne ist größer, welche dem Mittelpunkte näher liegt.

Anmerkung: Aus dem vorstehenden Lehrsatze folgt ebenfalls, daß der Durchmesser die größte Sehne ist, was schon im §. 14. Zus. VII. gezeigt wurde.

§. 106.

IV. Lehrsatz:

Errichtet man an dem einen Endspunkte des Durchmessers eine Tangens, und an dem andern eine Sekans des Kreises, und verlängert man diese beiden Linien, bis sie sich schneiden, so ist die Tangens die mittlere geometrische Proportionallinie zum Stücke der Sekans außer dem Kreise, und zur ganzen Sekans.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 86.) von einem Endspunkte *A* des Diamters *AB* die Tangens *AD*, und von dem andern *B* die Sekans *BD* gezogen, welche im Punkte *D* mit der Tangens zusammen trifft, und man ziehe noch die Sehne *AE*;

2) Es verhält sich jetzt nach dem II. Zusatze des §. 96.

$$DE : AD : DB.$$

Das ist, die Tangens ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Stücke der Sekans außer dem Kreise, und der ganzen Sekans, wenn sie auf dem Diameter steht.

§. 107.

V. Lehrsatz:

Wenn sich zwei Sekanten außer dem Kreise schneiden, so verhalten sich die Stücke außer dem Kreise umgekehrt, wie die ganzen Sekanten.

Beweis:

1) Man ziehe (Fig. 87.) vom Punkte *A* zu *D*, dann von *E* nach *F* die Sehnen *AD* und *EF*, um so die Punkte zu verbinden, wo die außer dem Kreise

in B sich schneidenden Sekanten AB und DB mit der Kreislinie zusammen treffen;

2) Weil die Peripherie des Kreises durch die vier Ecke des Viereckes AF geht, so sind die opponirten Winkel

$A+q=180°$, und $D+n=180°$ (§. 71. Zus. V.),
dann $p+q=180°$, und $m+n=180°$ (§. 11. Zus. III.),

---

also $A+q=p+q$, und $D+n=m+n$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.), folglich ist der Winkel $A=p$, u. $D=m$ (Arithm. I. § 34. 1.);

3) Das Dreieck EBF ist demnach dem Dreiecke ABD ähnlich (§. 92. Zus.), weßhalb $EB:BF=BD:BA$, da den Seiten EB und BD die gleichen Winkel p und A, und den Seiten BF und BA die gleichen Winkel m und D opponirt sind.

Es sind also die beiden Stücke außer dem Kreise BE und BF zu den ganzen Sekanten BA und BD umgekehrt proportionirt, indem in der angeführten Proportion $EB:BF=BD:BA$ die Sekans AB und ihr Stück EB die Stelle der äußern, und die Sekans BD und ihr Stück BF die Stelle der mittleren Glieder einnehmen (Arithm. II. §. 60.).

§. 108.

II. Aufgabe, aus der gegebenen Größe des Radius und der Sehne die Entfernung der Sehne vom Mittelpunkte des Kreises zu bestimmen.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 88.) der Radius AC des um C beschriebenen Kreises und die Sehne AB gegeben, und man soll die Größe des Perpendikels CD bestimmen, welches vom Zentrum zur Sehne gezogen ist, und deßhalb die Entfernung der Sehne vom Zentrum angibt (§. 56. Zus. IV.);

2) Das Dreieck ADC ist wegen des rechten Winkels bei D rechtwinklicht, und deßhalb $CD^2=AC^2-AD^2$ (§. 97. Zus. II.), und $CD=\sqrt{(AC^2-AD^2)}$.

3) Das Perpendikel CD halbirt die Sehne (§. 56.)

weßhalb $AD = \frac{1}{2}AB$, und $AD^2 = \frac{1}{4}AB^2$ (Arith. III. §. 70. 1.); substituirt man nun in der Gleichung bei Nro. 2. anstatt AD^2 den gleichen Werth, so findet man, daß die Entfernung $CD = \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)}$; d. h., man erhält die Entfernung der Sehne vom Zentrum, wenn man aus der Differenz der Quadrate des Radius und der halben Sehne die Quadratwurzel auszieht (§. 98. Auflös. II. Nro. 2.).

I. Zusatz: Bezeichnet man überhaupt den Radius eines Kreises mit r, die Sehne oder Chorde mit c, und ihre Entfernung vom Zentrum durch d, so ist $d = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$.

II. Zusatz: Ist die Sehne dem Radius gleich, somit $r = c$, so ist $d = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}r^2)} = \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \sqrt{(\frac{1}{4}r^2 \times 3)} = \frac{1}{2}r \times \sqrt{3}$ (Arithm. III. §. 71. Zus. I.) $= \frac{1}{2}r \times 1,7320508 \ldots$ (Arithm. III. §. 30.) $= 0,8660254 \ldots \times r$.

III. Zusatz: Ist endlich die Sehne c dem Radius r gleich, und $r = 1$, so ist die Entfernung der Sehne vom Mittelpunkte des Kreises, oder $d = 0,8660254$, im Falle man bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus drei nur sieben Dezimalen durch die Annäherung bestimmt.

§. 109.

III. Aufgabe, aus dem gegebenen Radius und der Sehne eine Sehne zu berechnen, die zur Hälfte des Bogens der vorigen Sehne gehört.

Auflösung:

1) Es sei gegeben (Fig. 88.) die Sehne AB, und der Radius AC, und man soll die Sehne AE berechnen, welche zum Bogen AE gehört, der die Hälfte des zur Sehne AB gehörigen Bogens AEB ist;

2) Wegen des rechten Winkels bei D ist $AE^2 = AD^2 + DE^2$ (§. 97.), und $AE = \sqrt{(AD^2 + DE^2)}$;

3) $AD = \frac{1}{2}AB$, mithin $AD^2 = \frac{1}{4}AB^2$;

4) $DE = CE - CD$; nach dem I. Zusatze des vorigen §. ist aber $CE = r$, und $CD = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$, so-

mit $DE = r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$, und $DE^2 = r^2 - 2r \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)} + r^2 - \frac{1}{4}c^2 = 2r^2 - 2r \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)} - \frac{1}{4}c^2$, indem man nach dem allgemeinen Quadrirungsgesetze (Arithm. IV. §. 1.) die zweitheilige Größe $CE - CD$, oder $r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$ zum Quadrate erhebt, und die beiden r^2 in eine Summe bringt;

5) Setzet man bei Nro. 2. anstatt AD^2 und DE^2 die gefundenen gleichen Werthe, so findet man, daß

$$AE = \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + 2r^2 - 2r \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}c^2)} - \tfrac{1}{4}c^2)}$$
$$= \sqrt{(2r^2 - 2r \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}c^2)})}.$$

I. Zusatz: Ist wieder die Sehne dem Radius gleich, mithin $c = r$, so ist

$$AE = \sqrt{(2r^2 - 2r \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}r^2)}} = \sqrt{(2r^2 - 2r \sqrt{\tfrac{3}{4}r^2})}$$
$$= \sqrt{(2r^2 - 2r \times (\sqrt{3} \times \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2}))}$$
$$= \sqrt{(2r^2 - 2r \times (\sqrt{3} \times \tfrac{1}{2}r))}$$
$$= \sqrt{(2r^2 - r^2 \sqrt{3})} = \sqrt{((2 - \sqrt{3}) r^2)}$$
$$= r \times \sqrt{(2 - \sqrt{3})}.$$

II. Zusatz: Setzt man endlich die Sehne c dem Radius r gleich, und $r = 1$, so ist

$$AE = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{(2 - 1,7320508 \ldots .)}$$
$$= \sqrt{0,2679492 \ldots .. } = 0,5176380 \ldots .$$

§. 110.

IV. **Aufgabe**, aus der gegebenen Sehne eines Kreisbogens, und der Entfernung seines mittleren Punktes von der Sehne den Durchmesser, oder Radius des Kreises zu berechnen.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 88.) die Sehne AB des Kreisbogens AEB, und das Perpendikel ED gegeben, welches die Entfernung des mittleren Punktes des Bogens von der Sehne angibt (§. 33. Zus. II.);

2) Man errichte vom Mittelpunkte D der Sehne auf diese das Perpendikel DC, und verlängere es auf beiden Seiten bis zur Peripherie des Kreises, so ist EF ein Durchmesser des Kreises, weil das am Mittelpunkte der Sehne errichtete Perpendikel durch das Zentrum des Kreises geht (§. 56. Zus. II.);

3) Die halbe Sehne DB ist jetzt eine rechtwinklichte Ordinate des Kreises, und die beiden Stücke des Diameters ED und DF sind die Abszissen desselben (§. 102. Zus. II.); daher verhält sich nach dem im §. 102. aufgestellten Lehrsatze $ED : DB : DF$;

4) In dieser Proportion suche man DF (Arithm. IV. §. 37.), es ist $DF = \frac{DB^2}{ED}$; das ist, man erhält das Segment DF, wenn man die halbe Sehne zum Quadrate erhebt, und das erhaltene Quadrat durch das Perpendikel DE dividirt;

5) Addirt man die beiden Stücke DE und DF, so hat man den Durchmesser EF, und dividirt man ihre Summe durch 2, so erhält man den Radius oder Halbmesser des Kreises, indem der Durchmesser $EF = ED + DF$, und der Radius $EC = \frac{ED + DF}{2} = \frac{EF}{2}$.

Beispiel:

Die neue Donaubrücke bei Dilingen, welche unter der Leitung des thätigen Herrn Bauinspektors Friedrich Beischlag, jetzigen Bau-Rathes der königl. Regierung des Unter-Donau-Kreises, gebaut wurde, besteht aus drei Kreisbögen von Eichenholz, wovon jeder 96 Schuh 8 Duodezimalzoll weit ist, und 9 Schuh in der Sprengung oder Höhe hat, so daß ihre ganze Länge 324 Schuh, ihre Breite 26 Schuh und ihre Höhe bis zum niedrigsten Wasserstande 25 Schuh beträgt.

Es ist nun die Frage, wie groß ist der Radius der Kreislinie, von welcher diese drei Bögen Theile sind?

I. Auflösung:

1) Nach Figur 88. ist hier die Weite des Kreisbogens AEB, und die Entfernung des mittleren Punktes E von seiner Sehne gegeben; es ist nämlich die Weite des Bogens, oder die Sehne $AB = 96$ Schuh 8 Zoll,

also $\frac{1}{2}AB = DB = 48$ Sch. 4 Z. = 580 Duodezimalzoll, und die Sprengung oder Höhe $ED = 9$ Schuh = 108 Duod. Zoll;

2) Nach der Auflösung der vorstehenden IV. Aufgabe ist $DF = \frac{DB^2}{ED}$, also $DF = \frac{580^2}{108} = \frac{580 \times 580}{108}$ $^{336400}/_{108} = 3114\,^{22}/_{27}$ Zoll;

3) Nach der Voraussetzung ist $DE = 108$ Zoll, und nach Nro. 2. ist $DF = 3114\,^{22}/_{27}$ Zoll, also $ED + DF$, oder der Durchmesser $EF = 108$ Z. $+ 3114\,^{22}/_{27}$ Z. $= 3222\,^{22}/_{27}$ Zoll = 268 Schuh $6\,^{22}/_{27}$ Zoll;

4) Der Halbmesser des Kreises dieser Bögen, oder EC ist also $= 3222\,^{22}/_{27}$ Zoll : 2 = $1611\,^{11}/_{27}$ Z. = 134 Schuh $3\,^{11}/_{27}$ Zoll.

II. Auflösung:

Mittels der Logarithmen kann die Auflösung auch auf diese Weise geschehen:

1) Es ist $DF = \frac{580^2}{108}$;

Log. 580 = 2,7634280
× 2

also Log. 580^2 = 5,5268560 = $1611\,^{11}/_{27}$ Z.
dann Log. 108 = 2,0334238

mithin Log. DF = 3,4934332 = Log. 3114,82.

2) Es beträgt demnach DF beinahe 3114,82 Zoll, und also $EF = DF + DE = 3114{,}82 + 108 = 3222{,}82$ Zoll = 268 Schuh 6,82 Zoll, und der Radius des Kreises oder E beträgt 1611,42 Zoll, also 134 Schuh 3,42 Zoll.

Anmerkung: Es kömmt bei dieser Aufgabe der bürgerliche oder Werkschuh vor, welcher nach dem Duodezimalmaaße in 12 Zoll abgetheilt wird (Arithm. I. §. 79. Nro. 8.); indem da der halbe Schuh 6, das Drittel 4, das Viertel 3, und das Sechstel eines Fußes genau 2 Zoll beträgt.

IV. Hauptstück.

Von der Lage und den Verhältnissen der Kreislinien.

I. Abschnitt.

Von der Lage der Kreislinien gegen einander in einer Ebene.

§. 111.

Konzentrische und Berührungskreise ꝛc.

a) Wenn zwei Kreise in einer Ebene das nämliche Zentrum, und ungleiche Radien haben, so heissen sie konzentrische Kreise; daher sind (Fig. 17.) die beiden mit den Radien CS und CQ um C beschriebenen Kreise konzentrische Kreise;

b) Kreise, derer Peripherien nur einen Punkt gemein haben, sonst entweder ganz außerhalb einander liegen, oder von denen einer ganz innerhalb des andern liegt, heissen Berührungskreise; daher sind (Fig. 91. und 92.) die um *A* und *B* beschriebenen Kreise Berührungskreise.

I. Zusatz: Die Peripherien zweier konzentrischer Kreise haben keinen Punkt gemein; indem alle Punkte der Kreislinie vom kleinern Halbmesser dem Zentrum näher liegen, als die Punkte der Kreislinie vom größern Halbmesser.

II. Zusatz: Zwei Kreislinien in einer Ebene, die einander schneiden, haben eine gemeinschaftliche Sehne. Denn sie haben (Fig. 89. u. 90.) zwei, und nur zwei Punkte gemein (§. 58. Zus. II.); mithin ist die gerade Linie *CD*, welche diese Durchschnittspunkte verbindet, eine gemeinschaftliche Sehne für beide Kreise (§. 14. e.).

III. Zusatz: Wenn man die gemeinschaftliche Sehne zweier einander schneidenden Kreislinien durch

ein Perpendikel halbirt, so geht dieses durch die Mittelpunkte beider Kreise (§. 56. Zus. II.), und ist deßwegen die Zentrallinie (§. 14 b.); auf diese Weise ist (Fig. 89.) das vom Mittelpunkte *E* der gemeinschaftlichen Sehne *CD* errichtete Perpendikel *AB* die Zentrallinie der um A und B beschriebenen Kreise.

IV. Zusatz: Die Zentrallinie steht allemal, wenn sich die beiden Kreise schneiden, in der Mitte auf der gemeinschaftlichen Sehne senkrecht. Denn (Fig. 89.) eine gerade Linie, welche die gemeinschaftliche Sehne halbirt, und auf ihr senkrecht steht, geht durch die Mittelpunkte A und B (Zus. III.); zwischen diesen beiden Punkten ist aber nur eine gerade Linie möglich (§. 3. Zus. II.), nämlich die Zentrallinie.

V. Zusatz: Die Durchschnittspunkte zweier Kreislinien, die sich schneiden, können als Endspunkte der gemeinschaftlichen Sehne, auf welcher in ihrer Mitte die Zentrallinie senkrecht steht, nicht in dieser Zentrallinie liegen.

VI. Zusatz: Zwei Kreislinien in einer Ebene, derer Radien und Zentrallinien eine solche Größe haben, daß jedes Paar von diesen drei Linien größer, als die dritte ist, schneiden einander (§. 17.).

VII. Zusatz: Wenn zwei Kreislinien einander schneiden, so haben ihre Radien und die Zentrallinie eine solche Länge, daß zwei von diesen Linien zusammen allemal größer sind, als die dritte einzeln.

Denn man ziehe (Fig. 89.) an einem der beiden Durchschnittspunkte, etwa zu *C* die Radien *AC* und *BC*, so bilden sie mit der Zentrallinie *AB* immer ein Dreieck (Zus. V.), wo also diese drei Linien als Seiten des Dreieckes die angegebene Größe haben (§. 18. Zus. II.).

VIII. Zusatz: Wenn zwei Kreislinien einen Punkt gemein haben, der mit den beiden Mittelpunkten nicht in einer geraden Linie, mithin nicht in der Richtung der Zentrallinie liegt, so haben sie noch einen Punkt gemein, und durchschneiden also einander.

Denn (Fig. 89.) zieht man zum gemeinschaftlichen Punkte *C* der Peripherien die Radien *AC* und *BC*, und

die Zentrallinie *AB*, so bilden diese drei Linien ein Dreieck, wo zwei von diesen Linien zusammen allemal größer sind, als die dritte (§. 18. Zus. II.), und die beiden Kreislinien haben deßwegen noch einen Punkt gemein, das ist, sie schneiden sich (Zus. VI.).

Anmerkung: Weil die konzentrischen Kreise in einer Ebene das nämliche Zentrum haben, so müssen ihre Radien allemal ungleich sein; sonst wären sie nur eine Kreislinie (§. 15.);

§. 112.

I. Lehrsatz:

Von zwei ungleichen Kreislinien, die einander schneiden, und derer Mittelpunkte sich auf einer Seite der gemeinschaftlichen Sehne befinden, liegt im kleinern Abschnitte der Bogen des größern Kreises zwischen der gemeinschaftlichen Sehne, und dem Bogen des kleinern Kreises.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 90.) der um B mit dem Halbmesser BC beschriebene Kreis der größere, und der um A mit dem Radius *AC* beschriebene Kreis der kleinere, ferner CD sei ihre gemeinschaftliche Sehne, und beide Mittelpunkte A und B liegen unterhalb dieser Sehne;

2) An dem Durchschnittspunkte C ziehe man für beide Kreise die Tangenten CF und CE (§. 75.), und die beiden Radien CB und CA;

3) Der Winkel *ACE*, den die Tangens des kleineren Kreises mit dem Radius desselben macht, ist ein rechter Winkel, und deßhalb gleich dem Winkel BCF, den die Tangens des größern Kreises mit dem Radius BC bildet (§. 74. Zus. I.);

4) Daher ist BCE größer als 90°, und BCD kleiner als 90 Grad (§. 11. Zus. II.), folglich liegt

die Tangens CF zwischen der Tangens CE, und der Sehne CD;

5) Es liegt aber auch der Bogen CG zwischen der Tangens CE und der Tangens CF, und der Bogen CH zwischen CF und CD (§. 72. a.), mithin liegt bei C der Bogen CH vom größern Kreise zwischen dem Bogen CG des kleinern Kreises, und der Sehne CD;

6) Aus den nämlichen Gründen liegt bei D der Bogen DH des größern Kreises zwischen dem Bogen DG des kleinern Kreises und der Sehne DC;

7) Es liegt also der ganze Bogen CHD vom größern Kreise zwischen dem Bogen CGD des kleinern Kreises, und der gemeinschaftlichen Sehne CD, indem sich diese beiden Bögen nur in den zwei Punkten C und D schneiden können (§. 58. Zus. II.).

I. Zusatz: Der Bogen CHD vom größern Kreise (Fig. 90.) ist demnach weniger erhaben, oder er ist flächer, als der Bogen CGD des kleinern Kreises.

II. Zusatz: Nimmt man in der geraden Linie, welche durch die beiden Mittelpunkte dieser Kreise geht, einen beliebigen Punkt K an, und beschreibt man mit KC um K einen Kreis, so geht seine Peripherie auch durch den Punkt D; indem die Zentrallinie die Sehne *CD* halbirt, und darauf senkrecht steht (§. 111. Zus. IV.), und deßhalb der Halbmesser *KC* der Linie *KD* gleich ist (§. 20.).

III. Zusatz: Je größer man den Halbmesser *CK* nimmt, das ist, je weiter der Mittelpunkt *K* von der Sehne *CD* auf der Seite, wo die Mittelpunkte A und B liegen, entfernt ist, desto flächer wird der Bogen des größern Kreises, desto mehr nähert er sich also seiner Sehne.

IV. Zusatz: Deßwegen kann eine gerade Linie als Bogen eines Kreises betrachtet werden, dessen Halbmesser sehr groß ist, und umgekehrt lassen sich kleine Bögen sehr großer Kreislinien wie ihre Sehnen betrachten, weil die Unterschiede solcher Bögen und Sehnen unmerklich sind.

§. 113.

II. Lehrsatz:

Zwei Kreise, die an einem Punkte ihrer Peripherien eine gemeinschaftliche Tangens haben, sind Berührungskreise.

Beweis:

1) Liegen (Fig. 91.) die Mittelpunkte der beiden um A und B beschriebenen Kreise auf verschiedenen Seiten der Tangens FE, so haben die Kreislinien nach der Annahme den Punkt G gemein, und ein Kreis liegt ganz außerhalb des andern, weßhalb sie Berührungskreise sind (§. 111. b.);

2) Liegen aber (Fig. 92.) die beiden Mittelpunkte A und B auf der nämlichen Seite der Tangens FE, so errichte man durch den Punkt G, wo die gemeinschaftliche Tangens beide Kreise berührt, das Perpendikel GH auf FE, es geht dieses durch die Mittelpunkte beider Kreise (§. 74. Zus. III.); dann nehme man in der größern um B beschriebenen Kreislinie einen beliebigen Punkt D an, der auch ein gemeinschaftlicher Punkt beider Peripherien sein soll, und ziehe die geraden Linien BD, AD und DG;

3) Es ist jetzt der Winkel BDG = DGB, weil der Radius BD = BG (§. 14. Zus. IV.), und also das Dreieck BDG gleichschenklicht ist (§. 21. Zus. I.); ferner der Winkel ADG < BDG, also ADG < DGB oder DGA (Arithm. I. §. 10. Nro. 6.), und AG < AD (§. 30.);

4) Es ist daher der Punkt D kein gemeinschaftlicher Punkt mehr für beide Kreislinien, sie haben nur den Punkt G gemein, und jeder andere Punkt D der größern Kreislinie liegt außerhalb des kleinern Kreises.

I. Zusatz: In zwei Berührungskreisen liegen die beiden Mittelpunkte mit dem Berührungspunkte in einer geraden Linie, indem sich die Kreise durchschneiden würden (§. 111. Zus. VIII.), und also keine Berührungskreise mehr wären (§. 111. b.).

II. Zusatz: Zwei Berührungskreise haben am Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangens. Denn (Fig. 91. u. 92.) man errichte durch G auf die Tangens FE des um A beschriebenen Kreises in der Figur 91. das Perpendikel HK, und in der Figur 92. das Perpendikel GK, so liegt in diesen beiden Perpendikeln der Mittelpunkt A (§. 74. Zus. III.), und auch das Zentrum B (Zus. I.), folglich steht EF auf beiden Radien AG und GB senkrecht, und ist also eine Tangens beider Kreise (§. 72. a.).

III. Zusatz: Von zwei Berührungskreisen, die auf einer Seite der Tangens liegen, entfernt sich der Bogen des größern Kreises weniger von der Tangens, als der Bogen des kleinern Kreises.

IV. Zusatz: Die Tangens läßt sich als ein Bogen von einem Kreise mit einem sehr großen Halbmesser betrachten; und umgekehrt läßt sich ein kleiner Bogen einer sehr großen Kreislinie als eine Tangens des Kreises betrachten.

§. 114.

I. Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt zwei Berührungskreise zu beschreiben.

Auflösung:

1) Durch den gegebenen Punkt G ziehe man (Fig. 91.) die gerade Linie HK, oder (Fig. 92.) die gerade Linie GK, und nehme in ihr entweder auf verschiedenen Seiten von G, wie bei Figur 91., oder auf der nämlichen Seite wie bei Figur 92. zwei beliebige Punkte A und B;

2) Aus A beschreibe man mit dem Halbmesser AG, und aus B mit dem Halbmesser BG Kreise, so sind sie die verlangten Berührungskreise.

Beweis:

Durch G errichte man auf GK oder HK das Perpendikel FE, so steht es am Endspunkte G auf beide Radien AG und BG senkrecht, und ist daher eine gemeinschaftliche Tangens für beide Kreise (§. 72. a.),

weßhalb die beiden um A und B beschriebenen Kreise die verlangten Berührungskreise sind (§. 113.).

§. 115.

II. Aufgabe, aus der gegebenen Zentrallinie, und den gegebenen Radien zweier Kreise in einer Ebene für sie auf einer Seite der Zentrallinie eine gemeinschaftliche Tangens zu ziehen.

I. Auflösung, im Falle die Radien gleich sind:

1) Man beschreibe (Fig. 93.) an den beiden Endspunkten der gegebenen Zentrallinie AB mit den gegebenen Radien AG und BH, welche einander gleich sind, die beiden Kreise;

2) Man errichte auf der nämlichen Seite auf die Zentrallinie die Radien AD und BE senkrecht, und verbinde ihre Endspunkte D und E durch die gerade Linie DE, so ist diese die verlangte Tangens.

Beweis:

Nach der Voraussetzung ist AD = BE, und AD und BE stehen auf AB senkrecht, daher ist auch AD zu BE parallel (§. 38. Zus. I.), und AD $\overline{\overline{\#}}$ BE, also auch AB $\overline{\overline{\#}}$ DE (§. 48. Zus. VIII.), und der Winkel D ist = E = 90° (§. 48. Zus. IV.), folglich ist DE die verlangte gemeinschaftliche Tangens beider Kreise auf der nämlichen Seite der Zentrallinie.

II. Auflösung, wenn die Radien ungleich sind:

1) Man verzeichne (Fig. 94.) die gegebene Zentrallinie AD, und beschreibe an ihren Endspunkten A und D mit den gegebenen ungleichen Radien AB und DH die beiden Kreise;

2) Die Zentrallinie AD halbire man (§. 27.), und beschreibe vom Mittelpunkte C mit dem Halbmesser CA = ½AD den mittlern Kreis;

3) Man nehme die Differenz der beiden Radien, indem man auf dem größern Radius HD vom Punk-

te H aus den kleinern AB aufträgt, reicht dieser bis m, so ist das Stück $mD = HD - AB$, und deßhalb die Differenz dieser beiden Radien;

4) Die gefundene Differenz Dm trage man von D aus als Sehne des mittlern Kreises auf, und verzeichne dadurch die Sehne $DF = Dm$;

5) Die Sehne DF verlängere man bis zur Peripherie des um D beschriebenen Kreises, mithin zu G, und ziehe von A auf der nämlichen Seite der Zentrallinie, wo DG liegt, zu DG den Halbmesser AE parallel (§. 39.);

6) Man verbinde endlich die beiden Punkte E und G durch die gerade Linie EG, so ist diese die verlangte gemeinschaftliche Tangens beider Kreise auf der nämlichen Seite der Zentrallinie.

Beweis:

1) Man ziehe von A nach F die Sehne des mittlern Kreises, es ist AFD ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel auf den Endspunkten des Diameters aufstehen, und deßhalb ein rechter Winkel (§. 71. Zus. III.), oder $AFD = 90°$, weßhalb auch sein Nebenwinkel $AFG = 90°$ (§. 9. Zus. III.);

2) Nach Nro. 3. und 4. der Auflösung ist $DF = Dm$, und indem man anstatt DH und AB die gleichen Radien DG und AE setzt, DF ist $= DG - AE$, ferner $FG = DG - DF$, mithin ist $FG = DG - (DG - AE) = DG - DG + AE = AE$ (Arithm. III. §. 49.);

3) DG oder FG ist auch nach Nro. 5. der Auflösung parallel zu AE, somit FG $\#$ AE, also auch AF $\#$ EG, und das Viereck AG ist ein Parallelogramm (§. 48. Zus. VIII.); in diesem ist der Winkel $AFG = 90°$, also auch $E = G = 90°$ (§. 48. Zus. IV.), und die gerade Linie EG steht an den Endspunkten E und G auf die Radien senkrecht, weßhalb sie auf der nämlichen Seite der Zentrallinie für die beiden Kreise die verlangte gemeinschaftliche Tangens ist (§. 72. a.).

Zusatz: Auf die nämliche Weise kann man auf der entgegengesetzten Seite der Zentrallinie für beide Kreise mit gleichen oder ungleichen Radien eine gemeinschaftliche Tangens ziehen, von welcher die beiden Berührungspunkte, im Falle sie vorhin oben waren, auf der untern Seite liegen.

§. 116.

III. Lehrsatz:

Durch die gegebene Zentrallinie und die beiden Halbmesser ist die Größe und Lage der gemeinschaftlichen Tangens auf jeder Seite der Zentrallinie vollkommen bestimmt, und es läßt sich auf einer Seite nur eine einzige solche Tangens ziehen.

Beweis:

1) Die gemeinschaftliche Tangens (Fig. 93. u. 94.) muß allemal mit der Zentrallinie, und den beiden Radien ein Viereck bilden, und auf den Radien an den Endspunkten senkrecht stehen (§. 74. Zus. I.);

2) Sind die Radien gleich (Fig. 93.) so ist das Viereck AE ein Parallelogramm (§. 48. Zus. VIII.), mithin ist auch der Winkel $A = B = 90°$ (§. 48. Zus. IV.), und die Lage der beiden Halbmesser AD und BE, somit auch die der Berührungspunkte D und E gegeben, deßhalb ist auch die Lage und Größe der gemeinschaftlichen Tangens DE vollkommen bestimmt, und es läßt sich außer dieser auf der obern Seite keine andere gemeinschaftliche Tangens beider Kreise ziehen;

3) Sind hingegen die Radien der Kreise ungleich (Fig. 94.), und man zieht die gerade Linie AF, so ist im rechtwinklichten Dreiecke AFD, da der Winkel AFD ein rechter Winkel ist (§ 71. Zus. III.), die Hypotenuse AD, und das Perpendikel $DF = DG - FG = DH - AE$ gegeben, und deßhalb sowohl die Seite $AF = EG$, als auch der Winkel $ADF = ADG$ vollkommen bestimmt (§. 34. Zus. II.), da-

durch ist die Lage des Halbmessers DG zur Zentrallinie DA, somit auch die Lage des Berührungspunktes G gegeben;

4) Endlich ist AE # DG, indem man den Halbmesser AE parallel zu DG gezogen hat; und dadurch ist auch die Lage des Berührungspunktes E bestimmt.

Zwischen den beiden Punkten D und E der einen, und den Punkten E und G der andern Figur ist nur eine gerade Linie möglich (§ 3. Zus. II.); es ist also die Größe und Lage der gemeinschaftlichen Tangens bei Kreisen von gleichen und ungleichen Radien durch die gegebene Zentrallinie und die Radien vollkommen bestimmt, und es läßt sich auf jeder Seite der Zentrallinie nur eine gemeinschaftliche Tangens ziehen.

§. 117.

III. **Aufgabe**, aus der gegebenen Zentrallinie und den beiden Radien eine gemeinschaftliche Tangens zu ziehen, welche die beiden Kreise auf verschiedenen Seiten der Zentrallinie berührt.

Auflösung:

1) Man verzeichne (Fig. 95.) die gegebene Zentrallinie AE, und an den Endspunkten derselben aus den gegebenen Radien die beiden Kreise;

2) Man halbire die Zentrallinie AE, und beschreibe aus ihrem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser CA = ½AE den mittlern Kreis;

3) Zu diesem Kreise verzeichne man vom Punkte A aus die Sehne AF, welche die Summe der beiden Radien ausdrückt, somit gleich AG + EK ist, und ziehe auf der andern Seite der Zentrallinie den Radius EA parallel zu AF;

4) Die Sehne AF, weil sie größer als AG oder AD ist, durchschneidet die um A beschriebene Kreislinie im Punkte D, man ziehe nun von diesem Punkte zu H die gerade Linie DH, so ist diese die verlangte gemeinschaftliche Tangens.

Beweis:

1) Man ziehe von F nach E die gerade Linie FE, so ist AFE = 90°, somit ein rechter Winkel (§. 71. Zus. III);

2) Die Linie AF ist = AD + DF, und AF als die Summe beider Radien ist = AD + EH, somit AD + DF = AD + EH, und DF = EH;

3) Die Linie EH ist zu AF parallel gezogen worden, mithin ist DF ≠ EH, also auch DH ≠ EF, und das Viereck DE ist ein Parallelogramm (§. 48. Zus. VIII.); weßhalb die Winkel bei D und H, indem der Winkel AFE oder DFE = 90°, rechte Winkel sind.

Die gerade Linie DH steht also an den Endspunkten D und H auf beide Radien AD und EH senkrecht, und ist somit für beide Kreise, die sie auf verschiedenen Seiten der Zentrallinie berührt, eine gemeinschaftliche Tangens.

Zusatz: Wird die Summe der beiden Radien von A aus auf der untern Seite als Sehne des mittlern Kreises aufgetragen, dann durch E auf der obern Seite ein Radius des kleinern Kreises zu dieser Sehne parallel gezogen, und zieht man durch die Endspunkte der Radien eine gerade Linie, so ist diese eine gemeinschaftliche Tangens beider Kreise, von welchen sie den größern unten, und den kleinern oben berührt.

§. 118.

IV. Lehrsatz:

Durch die gegebene Zentrallinie und die beiden Halbmesser ist die Tangens vollkommen bestimmt, so daß nur eine Tangens möglich ist, welche den größern Kreis auf der obern, und den kleinern Kreis auf der untern Seite, oder umgekehrt berührt.

Beweis:

1) Weil (Fig. 95.) die Berührungspunkte D und H auf verschiedenen Seiten der Zentrallinie liegen, so

muß

muß die gemeinschaftliche Tangens die Zentrallinie in irgend einem Punkte B durchschneiden;

2) Da ferner die Tangens auf die beiden Radien senkrecht stehen muß (§. 74. Zus. I.), so ist der Winkel $D = E = 90^\circ$, mithin $AD \# EH$ (§. 38. Zus. I.);

3) Verlängert man den größern Halbmesser AD um $EF = EH$, und zieht man die gerade Linie EF, so ist $DF \# EH$, mithin auch $FE \# DH$ (§. 48. Zus. VIII.), und also der Winkel $F = ADB$ (§. 41.) $= 90$ Grad (Nro. 2.);

4) Im rechtwinklichten Dreiecke AFE ist die Hypotenuse AE als die Zentrallinie, und der Kathet $AF = AD + DF = AD + EK$ als die Summe der beiden Radien gegeben, und dadurch das Dreieck AFE vollkommen bestimmt (§. 34. Zus. II.), weßhalb auch die Seite FE und der Winkel FAE oder DAE, mithin die Lage des Halbmessers AD zur Zentrallinie, und also auch der Berührungspunkt D gegeben ist;

5) Da nämlich $EH \# AD$ (Nro. 2.), so ist im kleinern Kreise die Lage des Halbmessers EH zur Zentrallinie, folglich auch der Berührungspunkt H, und durch die beiden Berührungspunkte D und H ist die Tangens DH selbst vollkommen bestimmt.

II. Abschnitt.

Von Verhältnissen der Kreislinien.

§. 119.

Die in dem Kreise, und die um den Kreis beschriebene Figur.

a) Wenn alle Seiten einer Figur Sehnen eines Kreises sind, so sagt man, die Figur sei in dem Kreise beschrieben, oder der Kreis sei um sie beschrieben; so z. B. ist (Fig. 96.) das Dreieck ABD, dann (Fig. 98.) das Viereck ABDE, und

(Fig. 100.) das Vieleck abdefg in dem Kreise beschrieben, und der Kreis ist um sie beschrieben.

b) Wenn aber alle Seiten der Figur Tangenten eines Kreises sind, so heißt die Figur um den Kreis beschrieben, und der Kreis in die Figur beschrieben; so z. B. ist (Fig. 97.) das Dreieck BAF, und (Fig. 100.) das Vieleck ABDEFG um den Kreis beschrieben, und der Kreis ist in sie beschrieben.

c) Die in dem Kreis beschriebene Figur wird auch eine innere, und die um den Kreis verzeichnete Figur eine äußere genannt; so ist (Fig. 100.) das Vieleck abdefg ein inneres, und ABDEFG ist ein äußeres Vieleck.

§. 120.

I. Aufgabe, um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung:

Man beschreibe (Fig. 96.) eine Kreislinie, welche durch die Dreiecke eines Dreieckes ABD geht (§. 58.); dadurch werden alle Seiten der Figur Sehnen des Kreises, und man hat einen Kreis um das Dreieck verzeichnet (§. 119. a.).

§. 121.

II. Aufgabe, in ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung:

1) Man theile (Fig. 97.) zwei Winkel B und F, die an einer Seite des Dreieckes BAF anliegen, durch die geraden Linien BC und FC in zwei gleiche Theile (§. 26.);

2) Aus dem Punkte C, in welchem sich diese Linien durchschneiden, fälle man auf eine Seite des Dreieckes ein Perpendikel (§. 33.), etwa CG auf BF, und beschreibe damit aus C einen Kreis, so ist dieser der verlangte, in das Dreieck beschriebene Kreis.

Beweis:

1) Zwei Winkel eines Dreieckes halten weniger als 180 Grad (§. 28. Zus. II.), daher ist $B + F < 180^{\circ}$, mithin auch $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}F < 180^{\circ}$, oder $p + n < 180^{\circ}$, und die Linien BC und FC durchschneiden sich also in einem Punkte C auf der Seite dieser Winkel (§. 40.);

2) Man ziehe auf die beiden übrigen Seiten BA und AF vom Punkte C die Perpendikel CE und CD, so ist

3) der Winkel $p = r$, dann $G = E = 90^{\circ}$, und $BC = BC$, also $\triangle BCG \cong \triangle BCE$ (§. 44. Zus. II.), und $CG = CE$ (§. 18. Zus. IV.);

4) Eben so ist der Winkel $n = m$, dann $G = D = 90^{\circ}$, und $CF = CF$, also $\triangle GCF \cong \triangle CDF$, und $CG = CD$;

5) Es sind demnach die Perpendikel CG, CD und CE Radien des Kreises, und auf ihnen stehen die Seiten des Dreieckes senkrecht, sind also Tangenten des Kreises (§. 73.), und der Kreis ist in das Dreieck beschrieben.

§. 122.

I. Lehrsatz:

Wenn man eine Kreislinie in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilet, und durch alle Theilungspunkte der Ordnung nach Sehnen zieht, so erhält man ein in den Kreis beschriebenes Vieleck von so vielen Seiten, als Theile die Kreislinie hat.

Beweis:

1) Man theile (Fig. 100.) die Kreislinie in n gleiche Theile, und ziehe der Ordnung nach zu den Theilungspunkten die Sehnen ab, bd, de u. s. f., so erhält die Figur so viele Seiten, als die Kreislinie Theile hat, somit n Seiten;

2) Da nach der Annahme alle Bögen gleich sind,

so sind auch alle Sehnen (§. 61. Zus. III.), mithin alle Seiten dieser Figur gleich;

3) Jeder Winkel dieser Figur ist ein Peripheriewinkel, und steht auf n—2 solchen Bögen auf, mithin sind alle Winkel einander gleich (§. 71. Zus. II.), und die Figur ist regulär (§ 13. b.);

4) Weil endlich alle Seiten der Figur Sehnen des Kreises sind, so sind sie ein in den Kreis beschriebenes reguläres n Eck (§. 119. a.).

Zusatz: Wenn ein Bogen der nte Theil der Kreislinie ist, so ist seine Sehne die Seite des im Kreise beschriebenen regulären n Eckes (Lehrs.), und gibt deßhalb, n mal an der Peripherie des Kreises aufgetragen, das reguläre n Eck.

§. 123.

III. Aufgabe, ein reguläres Viereck in den Kreis zu beschreiben.

Auflösung:

Man ziehe (Fig. 98.) zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser AD und BE, und verbinde ihre Endspunkte durch die Sehnen AB, BD, DE und EA, und man erhält das verlangte, in den Kreis beschriebene Viereck.

Beweis:

Durch die zwei Durchmesser, welche sich im Zentrum C senkrecht schneiden, wird die Kreislinie in vier Quadranten getheilt (§. 62. Zus. II.), weßhalb die vier Sehnen das verlangte Viereck geben (§. 122.).

Zusatz: Wenn man die Seiten des Viereckes durch Perpendikel halbirt, so werden auch die Bögen halbirt (§. 60. Zus. V.), und es wird die Kreislinie in acht gleiche Theile getheilt; daher erhält man ein in den Kreis beschriebenes reguläres Achteck.

Auf eine ähnliche Weise läßt sich aus dem Achtecke das reguläre Sechszeheneck, aus diesem das reguläre Zweiunddreißigeck, und so fortgesetzt, verzeichnen.

Anmerkung: 1) Es ist zureichend, wenn man (Fig. 98.) durch das Perpendikel CF nur den Bogen AE halbirt, und die Hälfte Am auf den übrigen Bögen aufträgt, und dadurch An = Bp = Dq = Am macht, um aus dem regulären Vierecke das reguläre Achteck zu verzeichnen. Auf eine ähnliche Weise kann man dann aus dem regulären Achtecke das reguläre Sechszehneck ꝛc. verzeichnen.

2) Die geometrische Reihe 4, 8, 16, 32, 64 ...... (Arithm. IV. §. 45.), oder 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 ...... gibt die Anzahl der Ecke der regulären Figuren an, die man auf diese Weise in den Kreis verzeichnen kann.

§. 124.

IV. Aufgabe, in den Kreis ein reguläres Sechseck zu beschreiben.

Auflösung:

Man trage (Fig. 99.) den Radius AC sechsmal auf der Peripherie des Kreises auf, und ziehe zu den Durchschnittspunkten Sehnen; man erhält dadurch ein in den Kreis beschriebenes reguläres Sechseck (§. 121.).

I. Zusatz: Zieht man (Fig. 99.) die Sehnen DA, DF und AF zu den doppelten Bögen des Sechseckes, so wird ein reguläres Dreieck ADF in den Kreis beschrieben (§. 122.).

II. Zusatz: Theilet man durch Perpendikel (Fig. 99.) alle Seiten, mithin auch alle Bögen vom regulären Sechsecke in zwei gleiche Theile, und zieht man Sehnen, so erhält man das reguläre Zwölfeck, aus diesem auf eine ähnliche Weise das Vierundzwanzigeck, und so fortgesetzt.

III. Zusatz: Ueber eine gegebene gerade Linie ag (Fig. 100.) wird ein reguläres Sechseck verzeichnet, wenn man über diese Linie ein gleichseitiges Dreieck aCg verzeichnet (§. 19. Zus. II.), aus C mit dem Halbmesser Ca = ag einen Kreis beschreibt, den Radius dieses Kreises sechsmal an der Peripherie aufträgt, und die Durchschnittspunkte durch Sehnen verbindet.

Anmerkung: 1) Was in der ersten Anmerkung des vori-

gen §. bemerkt wurde, kann auch hier bei der Verzeichnung des regulären Zwölfeckes aus dem regulären Sechsecke ꝛc. benützt werden; hat man nämlich durch ein Perpendikel den Sextanten halbirt, so darf man seine Hälfte nur auf den übrigen fünf Kreisbögen, um auch sie zu halbiren, auftragen, und die Sehnen ziehen, damit man das Zwölfeck erhält, was eben so bei der Verzeichnung der fortgesetzten regulären Figuren geschehen kann.

2) Die geometrische Reihe 3, 6, 12, 24, 48..... oder 3, 3×2, 3×2^2, 3×2^3, 3×2^4..... gibt die Anzahl der Ecke der regulären Figuren an, die man auf vorstehende Weise in den Kreis verzeichnen kann.

3) Aus den in dem Zusatze des §. 123. und im vorstehenden II. Zusatze angegebenen Auflösungen ersieht man die Verfahrungsweise, nach der man, wenn was immer für eine reguläre Figur in den Kreis beschrieben ist, ein reguläres Vieleck von zweimal so viel Seiten in den Kreis verzeichnen kann.

§. 125.

V. **Aufgabe**, um einen Kreis, in welchem ein reguläres Vieleck beschrieben ist, ein reguläres Vieleck mit eben so vielen Seiten zu beschreiben.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 100.) in dem Kreis das Sechseck abdefg beschrieben, und man soll um den Kreis ein reguläres Sechseck beschreiben;

2) Man ziehe den Radius CH auf ag senkrecht (§. 33.), und am Endspunkte H die Tangens (§. 75.);

3) Zum Ecke a der innern Figur ziehe man den Radius Ca, und zum Ecke g den Radius Cg, und verlängere beide, bis sie die Tangens in A und G schneiden;

4) Man ziehe zu allen übrigen Ecken des innern Vieleckes Radien, und verlängere sie so, daß sie dem verlängerten Radius CA gleich werden; das ist, man mache $CB = CD = CE = CF = CA$;

5) Die Punkte A, B, D, E, F und G verbinde man der Ordnung nach durch gerade Linien, so ist die

Figur ABDEFG das verlangte, um den Kreis beschriebene Vieleck.

Beweis:

1) Die äußere Figur bekömmt offenbar so viele Seiten, als Zentriwinkel da sind, mithin so viele Seiten, als das innere Vieleck hat;

2) Die Sehne ag ist zu AG parallel, da CH auf ag nach Nro. 2. der Auflösung, und zugleich als Radius auf AG senkrecht steht (§. 38. Zus. I.), und die beiden Radien Ca und Cg schneiden verlängert in den Punkten A und G die Tangens (§. 40.);

3) Der Winkel aCh oder ACH ist gleich dem Winkel hCg oder HCG (§. 36. Zus. II.), ferner ist der Winkel AHC = GHC = 90° (§. 74. Zus. I.), und CH = CH, also ist das Dreieck AHC ≌ △ HCG (§. 22.), und AC = CG (§. 18. Zus. IV.);

4) Die innere Figur ist nach der Voraussetzung regulär, und deßhalb sind alle ihre Seiten gleich; diese sind, da die Figur in den Kreis beschrieben ist, Sehnen des Kreises, weßhalb alle Zentriwinkel aCg oder ACG, dann aCb oder ACB u. s. f., einander gleich sind (§. 60. Zus. III.);

5) Da überdieß in den Dreiecken ACG, ACB BCD ꝛc. die Seiten AC, CG, BC ꝛc. einander gleich sind, so sind die Dreiecke ACG, ACB ꝛc. kongruent (§. 20.), und alle Seiten der äußern Figur AG, AB ꝛc. sind einander gleich;

6) Die Radien ca, cb ꝛc. sind einander gleich (§. 14. Zus. IV.), gleichwie es die Seiten CA, CB ꝛc. sind, daher verhält sich Ca : AC = Cb : CB = Cd : CD u. s. w., folglich ist ab ♯ AB, dann bd ♯ BD u. s. f. (§. 83.), und der Vieleckswinkel gab = GAB, dann abd = ABD ꝛc., ferner sind die Winkel des innern Vieleckes einander gleich, daher sind es auch alle Winkel der äußern Figur;

7) Endlich sind die kongruenten Dreiecke ACB, BCD ꝛc. wegen der gleichen Seiten AC, BC, DC ꝛc. gleichschenklicht; zieht man nun, wie im Dreiecke ACG, vom Zentrum C auf alle übrigen Seiten der

äußern Figur die Perpendikel CK, CL ꝛc. so theilet jedes das entsprechende Dreieck in zwei kongruente rechtwinklichte Dreiecke (§. 36. Zus. II.), weßhalb auch die rechtwinklichten Dreiecke ACH, BCK, LDC ꝛc. kongruent sind, und jeder der gezogenen Perpendikel ist dem Radius CH gleich (§. 18. Zus. IV.);

8) Es stehen also alle Seiten der äußern Figur auf die Radien CH, CK, CL ꝛc. an ihren Endspunkten senkrecht, und sind deßhalb Tangenten des Kreises.

Daher hat man auf die angezeigte Weise um den Kreis ein Vieleck beschrieben, welches mit dem innern gleichnamig (§. 13. c.) und ebenfalls regulär, und deßhalb das verlangte Vieleck ist.

§. 126.

II. Lehrsatz:

Wenn man in einer regulären Figur zwei Winkel, die an einer Seite anliegen, durch gerade Linien halbirt, so durchschneiden sich diese innerhalb der Figur in einem Punkte, der von allen Ecken, und von allen Seiten der Figur gleich weit entfernt ist.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 98.) in den Kreis das reguläre Viereck ABIDE beschrieben, und man halbire an der Seite AE durch die Linien AC und EC die beiden anliegenden Vieleckswinkel BAE und AED (§. 26.);

2) Bei den regulären Figuren sind alle Winkel, indem sie einander gleich sind, hohl (§. 9. b.), und deßwegen

$$\begin{array}{ll} & BAE < 2R \\ \text{und} & AED < 2R \\ \hline \text{also} & BAE + AED < 4R, \\ \text{und} & \tfrac{1}{2}BAE + \tfrac{1}{2}AED < 2R, \\ \text{oder} & r + s < 180^\circ, \end{array}$$

weßwegen die Linien AC und EC in einem Punkte C auf der Seite dieser Winkel zusammen stossen (§. 40.);

3) Nach Nro. 1. hat man die Polygonswinkel A und E halbirt, weßhalb $\frac{1}{2}$BAE = $\frac{1}{2}$AED oder r = s, mithin AC = EC (§. 23.), ferner AE = ED, dann EC = EC, und s = t, also ist △ ACE ≌ △ ECD, folglich CD = AC = EC, und der Winkel s = x = $\frac{1}{2}$AED = $\frac{1}{2}$EDB;

4) Auf eine ähnliche Weise wird für die übrigen Ecke bewiesen, daß CB u. s. w. gleich CA ist, und deßhalb der Durchschnittspunkt C von allen Ecken der regulären Figur gleich weit absteht;

5) Man ziehe aus C auf alle Seiten Perpendikel, so ist EH = $\frac{1}{2}$AE, und EL = $\frac{1}{2}$ED (§. 36. Zus. II.), somit EH = EL, ferner EC = EC, also △ HCE ≌ △ ECL (§. 34. Zus. II.), und CH = CL (§. 18. Zus. IV.); aus den nämlichen Gründen folgt, daß CH = CL = CK u. s. w., mithin, daß auch alle Entfernungen der Seiten vom Punkte C, oder alle Perpendikel gleich groß sind.

§. 127.

VI. Aufgabe, um, und in jede reguläre Figur einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung:

a) Will man um eine reguläre Figur einen Kreis beschreiben, so halbire man durch gerade Linien zwei an einer Seite anliegenden Winkel, etwa (Fig. 101.) die beiden Polygonswinkel A und G, und aus dem Punkte C, in dem sich die Linien AC und GC schneiden, ziehe man zum Ecke A die gerade Linie CA, und beschreibe damit einen Kreis, so geht solcher durch alle Ecke des Vieleckes (§. 126.), und ist deßwegen um das Vieleck beschrieben (§. 119. a.).

b) Will man in die reguläre Figur einen Kreis beschreiben, so halbire man (Fig. 101.), wie vorhin bei a., zwei an einer Seite anliegenden Winkel, und vom Punkte C, in welchem sich die geraden Linien AC und CG schneiden, ziehe man auf AG das Perpendikel CH; damit beschreibe man einen Kreis, so ist dieser in das Vieleck beschrieben.

Denn zieht man aus C auf alle übrigen Seiten Perpendikel, so sind sie dem Radius CH gleich (§. 126.), mithin stehen alle Seiten des Vieleckes auf den Endspunkten der Radien senkrecht, sind also Tangenten des Kreises (§. 73.), folglich ist der Kreis in die reguläre Figur beschrieben (§. 119. b.).

I. Zusatz: Wenn in, oder um den Kreis ein reguläres Vieleck beschrieben ist, so halbirt der Radius des Kreises jeden Polygonswinkel. Denn eine gerade Linie, welche (Fig. 101.) den Winkel A halbirt, geht durch das Zentrum C (§. 126.), zwischen den zwei Punkten A und C ist aber nur eine einzige gerade Linie möglich (§. 3. Zus. II.), daher halbirt jeder Radius den Polygonswinkel, zu dessen Scheitel er gezogen wird.

II. Zusatz: Wenn man in einem regulären Vielecke, das in, oder um den Kreis beschrieben ist, aus des Kreises Mittelpunkte an alle Ecke gerade Linien zieht, so erhält man eben so viele kongruente Dreiecke; denn (Fig. 98.) da $AC = CE = CD$, und $AE = ED$, so ist $\triangle ACE \cong \triangle ECD$ (§. 24.), was sich aus den nämlichen Gründen eben so in Absicht auf die übrigen Dreiecke verhält.

III. Zusatz: Der Zentriwinkel eines regulären Vieleckes von n Seiten ist $= \frac{360°}{n}$. Denn (Fig. 98.) alle Winkel um C zusammen halten 360° (§. 11. Zus. IV.); nun gibt es bei einem Vielecke von n Seiten n solche, einander gleiche Winkel (Zus. II.), es ist also einer davon, etwa $ACE = \frac{360°}{n}$.

Daher ist z. B. der Zentriwinkel im regulären Fünfecke $= \frac{360°}{5} = 72°$, im regulären Sechsecke $= \frac{360°}{6} = 60°$, im regulären Siebenecke $= \frac{360°}{7} = 51° \, 25' \, 42\frac{6}{7}''$, mithin beinahe $= 51° \, 25' \, 43''$ u. s. f.

IV. Zusatz: Man findet den Polygonswinkel, wenn man den Zentriwinkel von 180° abzieht; daher ist derselbe nach dem III. Zusatze $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ $= \frac{n \cdot 180^\circ - 360^\circ}{n}$ (Arithm. III. §. 67. Lehrs. II. Zus.) $= \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ (Arithm. III. §. 87. IV.).

Denn (Fig. 98.) im Dreiecke ACE ist die Summe der Winkel $r + s + C = 180^\circ$ (§. 43.), und $s = t$ (§. 127. Zus. I.), mithin $s + t + C = 180^\circ$, also $s + t$, oder der Polygonswinkel $AED = 180^\circ - C = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

Daher ist z. B. der Polygonswinkel im regulären Fünfecke $= \frac{180^\circ(5-2)}{5} = \frac{180^\circ \times 3}{5} = 108^\circ$, im regulären Sechsecke $= \frac{180^\circ(6-2)}{6} = \frac{180^\circ \times 4}{6} = 120^\circ$, im regulären Siebenecke $= \frac{180^\circ(7-2)}{7} = \frac{180^\circ \times 5}{7}$ $= 128\,{}^4\!/_7{}^\circ = 128^\circ\ 34'\ 17\,{}^1\!/_7{}''$.

Anmerkung: 1) In Absicht auf den IV. Zusatz sehe man im §. 53. den Zusatz nach, in welchem ebenfalls die Regel angegeben ist, nach welcher man den Polygonswinkel des regulären Vieleckes, wenn man die Anzahl der Seiten weiß, berechnen kann.

2) Will man mechanisch (§. 64. Anm. 1.) mittels eines Winkelmessers reguläre Vielecke mit wie immer vielen Seiten beschreiben, so verzeichnet man einen Kreis, und darin, wenn das Vieleck n Seiten hat, einen Zentriwinkel, welcher der nte Theil von 360 Grad, oder $= \frac{360^\circ}{n}$ ist (§. 127. Zus. III.), dann ist sein Bogen der nte Theil der Peripherie (§. 60. Zus. I.); trägt man nun die Sehne dieses Bogens auf der Kreislinie n mal auf, so erhält man das verlangte n Eck (§. 122.).

3) Weil nach dem IV. Zusatze des §. 127. der Poly-

gonswinkel $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, und deßhalb seine Hälfte $= 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$ ist, so kann man (Fig. 101.) über eine gerade Linie AG ein reguläres n Eck verzeichnen, wenn man an den Endspunkten dieser Linien zwei Winkel CAG und CGA verzeichnet, von welchen jeder $= 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$, und vom Durchschnittspunkte C der beiden Schenkel mit dem Radius CA einen Kreis beschreibt, und die Linie AG als Sehne des Kreises n mal aufträgt (§. 122.).

Denn es ist $CAG + CGA = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n} + 90 - \frac{180^\circ}{n}$, oder $180^\circ - \frac{360^\circ}{n} < 180^\circ$, und die Linien AC und CG stossen im Punkte C zusammen (§. 40.); ferner ist (§. 43. Zus. I.) der Dreieckswinkel ACG $= 180^\circ - (CAG + CGA) = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = \frac{360^\circ}{n}$, und deßhalb ist der Kreisbogen AG der nte Theil der Peripherie.

§. 128.

III. Lehrsatz:

In gleichnamigen regulären Figuren verhalten sich die Perimeter, wie die Halbmesser oder Durchmesser jener Kreise, welche um sie beschrieben sind.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 101.) um die Punkte C und c Kreise, und in sie zwei gleichnamige reguläre Figuren beschrieben, und man ziehe aus C die Radien CA und CG, und aus c die Radien ca und cg;

2) Bezeichnet überhaupt n die Anzahl der Seiten, die jede Figur hat, so ist die Hälfte des Polygons-

winkels BAG oder $CAG = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$ (§. 127. Zus. I.), und im andern Kreise ist $cag = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$ (§. 127. Anm. 3.), mithin CAG = cag (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.), ferner ist der Zentriwinkel ACG $= \frac{360^\circ}{n}$, und $acg = \frac{360^\circ}{n}$ (§. 127. Zus. III.), folglich ist auch ACG = acg, und △ ACG ∽ △ acg; deßwegen verhält sich (§. 92. Zus.)

AC : ca = AG : ag,

und AG : ag = PERJM : perim. (§. 101.)

---

also PERJM : perim. = CA : ca = 2CA : 2ca;

3) Drückt man CA und ca als die Radien der Kreise durch R und r, und die doppelten Halbmesser 2CA und 2ca, oder die Durchmesser durch D und d aus, so verhält sich

PERJM : perim. = R : r = D : d.

Es sind also die Perimeter gleichnamiger regulärer Figuren mit den Radien oder Durchmessern der Kreise, welche um sie beschrieben sind, gerade proportionirt.

§. 129.

IV. Lehrsatz:

Im Kreise kömmt die Sehne ihrem Bogen um so näher, je kleiner sie ist.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 88.) die gerade Linie AB die Sehne des Bogens AEB, und durch den senkrechten Radius CE sei die Sehne und der Bogen halbirt (§. 60. Zus. V.), so daß AD = ½AB, und arc. AE = ½ arc. AEB;

2) Die Sehne AB bezeichne man durch c, und den Bogen AEB durch a, es ist AD = ½c, und arc. AE = ½a; ferner die Sehne AE des halben Bogens drücke man aus durch b, mithin setze man AE = b;

3) Zwischen zwei Punkten ist die gerade Linie allemal die kürzeste (§. 3. Zus. II.), daher ist arc. AEB > AB, sind arc. AE > AE, oder a > c, und $\frac{1}{2}$a > b, mithin a > 2b;

4) Man subtrahire c von a, und 2b von a, und drücke den ersten Rest durch d, und den zweiten durch f aus, es ist a — c = d, und a — 2b = f, somit d + c = a, und a = 2b + f (Arithm. III. §. 96. Zus. I.), weßhalb c + d = 2b + f (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.);

5) Die Sehne AE ist größer als AD, gleichwie EB > DB ist (§. 30. Zus. IV.), oder b > $\frac{1}{2}$c, also 2b > c, oder c < 2b.

Nach Nro. 4. ist c + d = 2b + f,
und c < 2b,

also d > f (Arithm. I. §. 34. III.).

Es drückt aber d den Unterschied zwischen dem Bogen a oder AEB, und der Sehne c oder AB aus, und f bezeichnet den Unterschied zwischen dem Bogen a oder AEB und 2b oder den beiden Sehnen AE und EB des halben Bogens AE (Nro. 4.); ferner ist arc. AE > AE, und arc. EB > EB, also arc. AE + arc. EB > AE + EB, oder arc. AEB > AE + EB.

Daher sind die beiden Sehnen des halben Bogens zusammen weniger vom ganzen Bogen unterschieden, als die ganze Sehne, mithin nähert sich die Sehne ihrem Bogen um so mehr, je kleiner sie ist.

I. Zusatz: Der Perimeter eines in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes ist kleiner, als die Peripherie des Kreises. Denn jede Seite des Vieleckes ist als Sehne des Kreises kleiner als ihr Bogen (§. 3. Zus. II.); so viele Seiten das Vieleck hat, in eben so viele Bögen ist die Peripherie getheilt; daher ist die Summe aller Kreisbögen größer als die Summe aller Seiten (Arithm. I. §. 25. III.), das ist, der Perimeter des in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes ist immer kleiner, als die Peripherie des Kreises.

II. Zusatz: Der Perimeter des in den Kreis be-

schriebenen regulären Vieleckes kömmt der Peripherie des Kreises um so näher, je mehrere Seiten das Vieleck hat. Denn die Seiten werden desto kleiner, je mehrere Seiten das reguläre Vieleck hat, daher nähern sie sich ihren Bögen um so mehr, mithin kömmt auch der Perimeter der Kreislinie um so näher.

Hat man (Fig 99.) in den Kreis das reguläre Sechseck beschrieben, und verzeichnet man daraus in dem Kreise das reguläre Zwölfeck, so ist Am + mG > AG (§. 3. Zus. II.), dann arc. Am > Am, und arc. mG > mG, daher arc. Am + arc. mG, oder arc. AmG > Am + mG, und dieses verhält sich eben so in Absicht auf die übrigen Bögen und Sehnen, woraus offenbar erfolgt, daß der Perimeter des regulären Zwölfeckes größer ist, als der Perimeter des regulären Sechseckes, indeß es aber immer noch kleiner ist, als die Peripherie des Kreises (Zus. I.), das ist, der Perimeter eines in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes kömmt der Peripherie des Kreises um so näher, je mehrere Seiten das Vieleck hat.

§. 130.

V. Lehrsatz:

Unendlich kleine Sehnen sind von ihren Bögen unmerklich unterschieden, und lassen sich deßhalb wie ihre Bögen betrachten.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 88.) auf der Sehne AB eines Kreisbogens AEB, der kleiner ist als die halbe Peripherie des Kreises, der Durchmesser EF senkrecht gezogen, so verhält sich (§. 102.)

$$ED : DA = DA : DF;$$

2) Der Durchmesser EF halbirt die Sehne AB, weßhalb DA = ½AB (§. 56.), und AB ist kleiner als EF (§. 14. Zus. VII.), folglich auch ½AB < ½EF, oder AD < CF, mithin um so mehr $AD < DF$;

3) Je mehr sich der Durchschnittspunkt D vom Zentrum C entfernt, und somit dem Punkte E sich

nähert, desto kleiner wird die Sehne *AB* (§. 67.), und der Bogen *AEB*, mithin auch die halbe Sehne *AD*, und desto größer wird dagegen *DF*;

4) Nun kann man den Punkt *D* so nahe an *E* setzen, als man will, mithin *AD*, folglich auch den Bogen so klein, als man will, und selbst gleich Null setzen, also *AD* gegen *DF* unendlich klein setzen;

5) Wie sich *DA* zu *DF* verhält, so verhält sich *ED* zu *DA* (Nro. 1.), daher ist, weil in der geometrischen Proportion die Verhältnisse einander gleich sind (Arithm. IV. §. 35. Nro. 1.), auch *ED* in Absicht auf *DA* unendlich klein, wenn es *AD* gegen *DF* ist;

6) Ist demnach die Linie *DE*, welche die größte Entfernung des Bogens von der Sehne angibt, unendlich klein, so ist der Unterschied zwischen der Sehne und dem Bogen unmerklich, die Sehne fällt mit ihrem Bogen zusammen, und man sagt aus diesem Grunde, unendlich kleine Sehnen lassen sich wie ihre Bögen betrachten.

I. Zusatz: Die Kreislinie läßt sich betrachten als der Perimeter eines in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes von unendlich vielen Seiten.

Denn der Perimeter des regulären Vieleckes ist die Summe aller unendlich kleinen Seiten oder Kreissehnen, mithin Perim. $=\infty$ chord. (Arithm. I. §. 10. Nro. 2.), und die Peripherie des Kreises ist der Inbegriff aller unendlich kleinen gleichen Bögen, oder Periph. $=\infty$ arc.; daher verhält sich

Periph. : Perim. $=\infty$ arc. : ∞ chord.
$=$ arc. : chord. (Arithm. IV. §. 41.).

Nun ist der Unterschied zwischen der unendlich kleinen Sehne und ihrem Bogen unmerklich, daher läßt sich auch die Peripherie des Kreises als der Perimeter des in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes von unendlich vielen und kleinen Seiten betrachten.

II. Zusatz: Der Kreis selbst läßt sich als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten; gleichwie man die Peripherie als den Perimeter eines solchen Vieleckes annehmen kann.

III. Zusatz: Alle Kreise sind einander ähnlich,

da man die Kreise als unendliche reguläre Vielecke, mithin als gleichnamige reguläre Vielecke betrachten kann (§. 90. Zus. IV.).

IV. Zusatz: In allen Kreisen verhalten sich die Peripherien wie ihre Radien oder Durchmesser (§. 128.).

Bezeichnet man die Peripherien zweier Kreise durch P und p, ihre Radien durch R und r, und ihre Durchmesser durch D und d, so verhält sich

$$P : p = R : r,$$

$$\text{und } P : p = D : d.$$

V. Zusatz: Das Verhältniß des Diameters zur Peripherie ist in allen Kreisen einerlei; ist demnach das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie in einem Kreise bestimmt, so gilt dasselbe für alle Kreise. Denn nach dem II. Zusatze verhält sich

$$P : p = D : d,$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{dann } P : D = p : d \\ \text{und } D : P = d : p\end{array}\right\} \text{Arithm. IV. §. 38.}$$

Anmerkung: Nennt man den Kreis ein unendliches reguläres Vieleck, so betrachtet man die krumme Kreislinie als eine geradgebrochene Linie (§. 3. c.), die aus unendlich vielen gleichen Theilen besteht, von welchen jeder als eine unendlich kleine Sehne wie sein Bogen angesehen werden kann, indem die unendlich kleinen Sehnen, und ihre Bögen als Punkte erscheinen, und deßhalb als einerlei betrachtet werden können.

§. 131.

VII. Aufgabe, aus dem Radius des Kreises, und dem Perimeter eines in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes den Perimeter einer um den Kreis beschriebenen regulären Figur von eben so viel Seiten zu berechnen.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 100.) der Radius AC, und der Perimeter des in den Kreis beschriebenen regulären Sechseckes bekannt, und man soll den Perimeter des um den Kreis beschriebenen regulären Sechseckes finden;

2) Man suche aus der Seite ag als der Sehne

des Kreises, und aus dem Radius aC die Entfernung der Sehne vom Zentrum, welche das Perpendikel Ch ausdrückt (§. 33. Zus. II.);

3) Zu diesem Perpendikel Ch, dann zum Radius aC, und zum Perimeter des innern Vieleckes suche man die vierte geometrische Proportionallinie (§. 88.), so ist diese der verlangte Perimeter der äußern Figur.

Beweis:

1) Man ziehe den Radius CH auf *AG* senkrecht, und durch H die Linie *AG* zu ag parallel, so ist *AG* die Seite des um den Kreis beschriebenen regulären Sechseckes (§. 125.);

2) Weil CH auch auf *AG* senkrecht steht, und $CA = CG$ ist, so ist $AH = \frac{1}{2}AG$, gleichwie $ab = \frac{1}{2}ag$ ist (§. 36. Zus. II.);

3) Die Linie ag ist parallel zu *AG* (§. 38. Zus. I.), daher verhält sich (§. 82.)

$Ch : CH = ah : AH = \frac{1}{2}ag : \frac{1}{2}AG$

und $Ch : CH = ag : AG$ (Arithm. IV. §. 41.)

ferner $ag : AG = \text{perim.} : \text{PERJM}$ (§. 101.)

also $Ch : CH = \text{perim.} : \text{PERJM}$ (Arithm. IV. §. 43.).

§. 132.

VI. Lehrsatz:

Das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie des Kreises ist beinahe $= 1 : 3{,}1415$.

Beweis:

1) Man denke sich ein in den Kreis beschriebenes reguläres Sechseck (§. 124.), und setze den Halbmesser des Kreises $= 1$, so ist (§. 13. b.) jede Seite des Sechseckes $= 1$, und der Perimeter $= 6$;

2) Der Perimeter des Sechseckes weicht von der Kreislinie noch zu viel ab, daher denke man sich in den Kreis das reguläre Zwölfeck beschrieben (§. 124. Zus. II.), und berechne aus dem Radius $= 1$, und aus der Seite des Sechseckes $= 1$ nach dem II. Zu-

saße des §. 109. die Seite des regulären Zwölfeckes; diese ist $= 0,5176380\ldots.$, und deßhalb der Perimeter des regulären Zwölfeckes $= 0,5176380\ldots. \times 12 = 6,2116560\ldots..$;

3) Auf eine ähnliche Weise berechnet man den Perimeter des Vierundzwanzigeckes, des Achtundvierzigeckes u. s. f;

4) Setzet man dieses Verfahren immer fort, so erhält man den Perimeter des in den Kreis beschriebenen regulären 768 Eckes (§. 124. Anm. 2.); dieser ist $= 6,2830\ldots.$, mithin beinahe $= 6,2830$;

5) Der Perimeter eines solchen Vieleckes kömmt der Kreislinie sehr nahe (§. 129. Zus. II.), und kann daher ohne merklichen Fehler als die Peripherie des um das Vieleck beschriebenen Kreises angenommen werden.

Drückt man nun den Radius des Kreises durch r, den doppelten Radius oder 2r durch d, und den Perimeter des Vieleckes oder die Peripherie des Kreises durch p aus, so ist $r = 1$, dann 2r oder $d = 2$, und p beinahe $= 6,2830$; weßhalb

$r : p = 1 : 6,2830\ldots.$

dann $2r : p = 2 : 6,2830\ldots.$ }
$d : p = 1 : 3,1415\ldots.$ } Arithm. IV. §. 41.

Das heißt, wenn z. B. der Durchmesser des Kreises 1 Schuh hat, so beträgt die Peripherie desselben beinahe 3,1415 Schuh, weßhalb die Kreislinie immer beinahe 3,1415 mal größer ist, als ihr Durchmesser.

I. Zusatz: Weil man das Verhältniß des Diameters zur Peripherie nicht genau in Zahlen anzugeben weiß, so hat man es durch Annäherung bestimmt:

a) Archimedes nahm an, daß die Kreislinie größer, als der Perimeter eines in den Kreis, und kleiner als der Perimeter eines um den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes ist, und suchte die Perimeter zweier solcher Vielecke von sehr vielen Seiten, wo also diese Perimeter selbst sehr wenig von einander unterschieden waren, und nahm die arithmetische Mittelzahl derselben für die gesuchte Größe der Kreislinie (Arithm. IV. §. 26. Zus.).

Er fand auf diesem mühsamen Wege die V

Verhältnisse 7:22 und 71:223, von welchen das erstere die Kreislinie etwas zu groß, und das letztere etwas zu klein angibt, das ist, wenn der Durchmesser 7 Schuh hat, so hält die Peripherie nicht gar 22 Schuh, und hat der Durchmesser 71 Schuh, so beträgt die Peripherie des Kreises etwas mehr, als 223 Schuh.

b) Nach ihm hat Herr Ludolph von Ceulen, von Hildesheim gebürtig und Professor der Mathematik in Leiden, das Verhältniß des Diameters zur Peripherie sehr genau bis auf 32 Dezimalen bestimmt; indem er das Verhältniß fand

1 : 3,14159265358979323846264338327950.

c) In dem logarithmisch-trigonometrischen Handbuche des k. k. österreichischen Herrn Oberstlieutenants Georg Freiherrn von Vega findet man am Schlusse der ersten Abtheilung der logarithmischen Tafeln das vorstehende ludolphische Verhältniß bis auf 140 Dezimalen angegeben. Herr Euler de variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi, Comment. Petrop. T. VIII. giebt den Umkreis auf 127 Dezimalstellen an. Die ersten 100 Ziffer hat Machin, alle aber Lagny gefunden. Das Oxford'sche Manuskript gibt 157 Dezimalen an. Verschiedene Arten, durch den Differential- und Integralkalkul die Dezimalen schneller zu finden, als durch die niedere Geometrie geschehen kann, lehren in ihren Lehrbüchern Leibnitz, Kästner, Wolf, Magold u. a. Man sehe auch folgende Abhandlung: Entwurf von vortrefflichen höher-mathematischen Lehren, Wien 1764. Der Kürze wegen wird in der Folge die im ludolphischen Verhältnisse vorkommende Zahl 3,14159265.... mit dem griechischen Buchstaben π bezeichnet, so daß $\pi = 3,14159265....$, und also Log. π = Log. $3,14159265.... = 0,4971499$ (Arithm. IV. §. 68.), wenn man nämlich den Logarithmus nur bis auf 7 Dezimalen angibt; ferner ist (Arithm. IV. §. 67.) der Logarithmus von $\frac{1}{2}\pi$, oder Log. $\frac{1}{2}\pi = 0,1961199$, und Log. $\frac{1}{4}\pi = 0,8950899$

— 1. In dem erwähnten Handbuche findet man den Logarithmus von π bis auf 23 Dezimalen angegeben.

d) Das Verhältniß des Herrn Professors Adrian Metius ist leicht im Gedächtnisse zu behalten; man setzt nämlich jede der drei ersten ungeraden Zahlen doppelt, und trennt die ersten drei Ziffern durch das Verhältnißzeichen (:) von den letzten, man erhält dadurch das Verhältniß 113 : 355, welches bis auf die siebente Dezimalstelle mit dem ludolphischen zusammentrifft, und deßhalb bei Berechnungen, wo man nicht mehr als sechs Dezimalen braucht, zureichend genau ist; es ist aber dieses Verhältniß in der Anwendung nicht so bequem, wie das ludolphische, weßhalb ich mich immer des letztern bedienen werde.

II. Zusatz: Dividirt man das Verhältniß 7 : 22 durch 7, dann 71 : 223 durch 71, und 113 : 355 durch 113, so werden diese Verhältnisse nicht geändert (Arithm. IV. §. 34. B.), und man erhält die Verhältnisse $1 : {}^{22}/_{7}$, dann $1 : {}^{223}/_{71}$, und $1 : {}^{355}/_{113}$; verwandelt man diese Brüche in Dezimalbrüche (Arithm. III. §. 7.), so erhält man die Verhältnisse:

α) Nach Archimed $7 : 22 = 1 : {}^{22}/_{7} = 1 : 3{,}142857 \ldots$
und $71 : 223 = 1 : {}^{223}/_{71} = 1 : 3{,}140845 \ldots$

β) Nach Metius $113 : 355 = 1 : {}^{355}/_{113} = 1 : 3{,}1415929 \ldots$

Vergleicht man diese Verhältnisse mit dem ludolphischen Verhältnisse 1 : 3,14159265 ...., so wird man bemerken, daß die bei α. angeführten Verhältnisse vom ludolphischen, welches zur Prüfung der übrigen Verhältnisse dient, schon bei der dritten Dezimalstelle abweichen, was in Absicht auf das bei β. angeführte Verhältniß erst beim siebenten Dezimalziffer der Fall ist.

III. Zusatz: In dem ludolphischen Verhältnisse $1 : \pi$ bezeichnet demnach die Zahl π die relative Größe der ganzen Peripherie, wenn man den Durchmesser des Kreises zum Maaße oder zur Einheit nimmt (Arithm. I. §. 2. e.); ist der Durchmesser $= 1$, so ist die Peripherie $= \pi$, dann die Größe der halben Peripherie $= {}^{1}/_{2}\pi$, und die des Quadranten $= {}^{1}/_{4}\pi$,

indem nach Nro. 5. der Auflösung $d:p=1:3,1415\ldots$, oder $d:p=1:\pi$, mithin $p=d\pi=\pi$ (Arithm. IV. §. 35. Zus. IV.), dann $\frac{1}{2}p=\frac{1}{2}\pi$, und $\frac{1}{4}p=\frac{1}{4}\pi$.

IV. Zusatz: Bezeichnet r den Halbmesser des Kreises, und setzt man in der vorstehenden Proportion 2r anstatt d, so verhält sich

$$2r:p=1:\pi,$$
$$\left.\begin{array}{l}\text{also } r:p=\frac{1}{2}:\pi\\ \text{und } r:p=1:2\pi\end{array}\right\}\text{ Arithm. IV. §. 41.}$$

Nimmt man daher den Halbmesser zum Maaße, oder zur Einheit, und setzt man $r=1$, so ist $p=2\pi$,

$$\text{dann } \tfrac{1}{2}p=\frac{2\pi}{2}=\pi,\text{ und } \tfrac{1}{4}p=\frac{2\pi}{4}=\tfrac{1}{2}\pi,\text{ d. h.,}$$

in dieser Voraussetzung drückt 2π die relative Größe der ganzen, und π die der halben Peripherie aus, und $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnet die relative Größe des Quadranten.

Anmerkung: 1) Weil in den mathematischen Rechnungen oft das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie vorkömmt, und deßhalb die Zahlen π, $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{4}\pi$ vielmal benützt werden, so habe ich im I. Zusatze dieses §. bei c. die Logarithmen von π, $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{4}\pi$ angegeben.

2) In der Anwendung nimmt man von der ludolphischen Verhältnißzahl $\pi=3,14159265\ldots\ldots$ mehr oder weniger Dezimalstellen, je nachdem eine größere oder kleinere Genauigkeit in Absicht auf das gesuchte Resultat erfordert wird.

§. 133.

VIII. Aufgabe, aus dem gegebenen Durchmesser des Kreises die Peripherie zu finden.

Auflösung:

1) Drückt man den Durchmesser durch d, die Peripherie durch p, und die ludolphische Verhältnißzahl

3,1415 . . . . durch π aus, so verhält sich nach dem im §. 132. aufgestellten Lehrsatze $d : p = 1 : \pi$;

2) Verwandelt man diese Proportion in eine Gleichung (Arithm. IV. §. 35. Zus. IV.), so findet man, daß $p = d\pi$, das ist, man findet die Peripherie des Kreises, wenn man den gegebenen Durchmesser mit der Verhältnißzahl π multiplizirt.

I. Zusatz: Weil der Durchmesser dem zweifachen Radius des Kreises gleich ist, also $d = 2r$, so ist $p = 2r\pi$, d. h., man erhält auch die Peripherie des Kreises, wenn man den doppelten Radius mit der Verhältnißzahl π multiplizirt.

II. Zusatz: Da $p = d\pi$, und $p = 2r\pi$, so ist $d = \frac{p}{\pi}$, und $r = \frac{p}{2\pi}$ (Arithm. III. §. 97. a.), d. h., aus der angegebenen Peripherie des Kreises findet man den Durchmesser, wenn man die Peripherie mit der Verhältnißzahl π dividirt, und den Radius findet man, wenn man die Peripherie mit der doppelten Verhältnißzahl π dividirt.

I. Beispiel:

In einer Reitschule bewegt sich ein Pferd in einem Kreise, dessen Durchmesser 30½ Schuh beträgt; welchen Weg legt dasselbe zurück, wenn es den Kreis an seiner ganzen Grenze durchläuft.

Auflösung:

Die Linie, welche das Pferd in dieser Voraussetzung durchläuft, ist eine Kreislinie, oder die Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser 30½, oder 30,5 Schuh beträgt, weßhalb $p = 30{,}5 \times 3{,}1415 \ldots = 95{,}81575$ (Arithm. III. §. 14.); das Pferd durchläuft also eine Bahn, welche beinahe 95 Schuh, 8 Zoll und 2 Linien beträgt (Arithm. I. §. 79.), man nimmt nämlich wegen der weggelassenen weitern De-

malen, die mehr als eine halbe Linie betragen, zwei Linien anstatt einer Linie.

II. Beispiel:

Weil auf einen Meridiangrad 15 deutsche oder geographische Meilen gehen, so hat der Erdkörper in seinem ganzen Umfange, den die Peripherie eines größten Kreises der Erdkugel bestimmt, 5400 deutsche Meilen; es ist nun die Frage, wie groß ist der Durchmesser der Erde?

I. Auflösung:

Drückt man den Durchmesser der Erde durch d, und ihren Umfang durch p aus, so verhält sich $d : p = 1 : \pi$, also (Arithm. IV. §. 36.) ist $d = \frac{p}{\pi}$

$$= \frac{5400}{3{,}1415\ldots} = 1718{,}9\ldots.$$ (Arithm. III. §. 18.)

Der Durchmesser der Erde hat demnach 1718,9.... deutsche oder geographische Meilen.

II. Auflösung:

Rechnet man mit Logarithmen, so ist (Arithm. IV. §. 76.), weil $d = \frac{p}{\pi}$, der Log. $d =$ Log. $p -$ Log. π; nämlich:

$$\text{Log. } p = 3{,}7323938$$
$$\text{Log. } \pi = 0{,}4971499$$

also Log. $p -$ Log. $\pi = 3{,}2352439 =$ Log. 1718,87...

Es hat demnach der Durchmesser der Erde 1718,87... deutsche Meilen.

Anmerkung: 1) Weil die Bestimmung des Durchmessers aus dem bekannten Umfange der Erde auf einer Annäherung beruht, so drückt man gewöhnlich den Diameter in einer geraden Zahl aus, und man sagt, der Durchmesser der Erde hat 1720, mithin ihr Halbmesser 860 deutsche oder geographische Meilen; aus diesem Grunde findet man z. B. in den physikalischen Lehrbüchern des Tit. Herrn geistlichen Rathes und Lyzeal-Direktors Pro-

fessors Dr. Weber den Durchmesser der Erde = 1720 geograph. Meilen.

2) Mit Logarithmen rechnet man bei größern Zahlen bequemer, als nach den Regeln der gemeinen oder niedern Arithmetik, wo die Multiplikation und Division mit mehrzifferichten Zahlen etwas beschwerlich ist (Arithm. IV. §. 63. Anm. 3.).

§. 134.

IX. Aufgabe, für den Halbmesser 1 die relative Größe eines Kreisbogens anzugeben, welcher eine bestimmte Anzahl von Graden hält.

Auflösung:

1) Setzet man die gesuchte Größe des Kreisbogens = arc., und drückt man die Anzahl der Grade, die der Bogen hält durch n aus, so hat der Zentriwinkel dieses Bogens ebenfalls n Grade (§. 63. Zus. III.);

2) Ist der Halbmesser des Kreises = 1, so beträgt die Größe des Quadranten $\frac{1}{2}\pi$, und dieser hält, wie sein Zentriwinkel 90 Grad, folglich verhält sich (§. 132. Zus. IV.)

$$90^\circ : n^\circ = \tfrac{1}{2}\pi : \text{arc}.$$

Daher ist für den Halbmesser = 1 die relative Größe des Bogens, oder $\text{arc.} = \frac{n^\circ \times \pi}{180^\circ}$.

Hält z. B. der Kreisbogen 45 Grad, und ist somit $n = 45^\circ$, so ist beim Halbmesser 1 die Größe des Bogens, oder $\text{arc. } 45^\circ = \frac{45^\circ . \pi}{180^\circ} = \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4} \times 3{,}14159265 \ldots = 0{,}78539816 \ldots$

1. Zusatz: Enthält der Bogen nebst Graden einige Minuten, oder bloß Minuten, so muß man sowohl die Größe des Bogens, welche durch n ausgedrückt ist, als auch die 180 Grad, die im Nenner des Bruches $\frac{n^\circ \times \pi}{180^\circ}$ vorkommen, auf Minuten reduziren (Arithm. I. §. 86.); es wird dadurch $\text{arc.} = \frac{n' \times \pi}{10800'}$.

Hat z. B. der Kreisbogen 20 Minuten, so ist beim Halbmesser 1 seine relative Größe, oder

$$\text{arc. } 20' = \frac{20' \times \pi}{10800'} = \frac{\pi}{540} = \frac{3,14159265}{540} \ldots\ldots$$

$= 0,005817764 \ldots$; indem

$$\text{Log. } \pi = 0,4971499$$
$$\text{Log. } 540 = 2,7323938$$

also $\text{Log. } \pi - \text{Log. } 540 = 0,7647561 - 3 = \text{Log. arc. } 20'$ $= \text{Log. } 0,005817764 \ldots$ (Arithm. IV. §. 67.).

II. Zusatz: Ist der Kreisbogen in Graden, Minuten und Sekunden gegeben, oder enthält er nur Minuten und Sekunden, oder endlich bloß Sekunden, so muß man sowohl die Größe des Bogens, als auch die im angeführten Bruche vorkommenden 180 Grad auf Sekunden reduziren; man erhält dadurch für den Halbmesser 1 die relative Größe des Bogens, oder arc. $= \frac{n''.\pi}{648000''}$.

Für $n = 40''$ ist also, wenn der Halbmesser $= 1$ ist, die Größe des Bogens, oder arc. $40'' = \frac{40''.\pi}{648000''}$

$$= \frac{\pi}{16200} = \frac{3,14159265\ldots}{16200} = 0,0001939254 \ldots;$$

indem

$$\text{Log. } \pi = 0,4971499$$
$$\text{Log. } 16200 = 4,2095150$$

also $\text{Log. } \pi - \text{Log. } 16200 = 0,2876349 - 4$ $= \text{Log. arc. } 40'' = \text{Log. } 0,0001939254 \ldots$

III. Zusatz: Ist für einen Kreis der Radius r im gewöhnlichen Fußmaaße gegeben, und man sucht nun in eben diesem Fußmaaße die Größe eines Bogens dieses Kreises, welcher in Graden, Minuten und Sekunden bestimmt ist, so darf man nur die relative Größe oder arc. für den Halbmesser 1 suchen, und die gefundene Zahl mit r multiplizieren, das ist, wenn

Arc. die gesuchte Länge dieses Bogens bezeichnet, so ist Arc. = arc. × r.

Denn wenn p die Peripherie des Kreises ausdrückt, und man verwandelt die gegebenen Grade und Minuten in Sekunden, setzet diese = n″, und man reduzirt zugleich auf Sekunden die Größe des Quadranten, welcher 90 Grad hält (§. 62. Zus. I.), und deßhalb 324000″ hat, so ist

$324000'' : n'' = \frac{1}{2}\pi : \text{arc.}$ (§. 132. Zus. IV.),
$324000'' : n'' = \frac{1}{4}p : \text{Arc.}$ (§. 62. a.),
$324000'' : n'' = \frac{1}{4}2r\pi : \text{Arc.}$ (§. 133. Zus. I.),
und $324000'' : n'' = \frac{1}{2}r\pi : \text{Arc.}$,
mithin $\frac{1}{2}\pi : \frac{1}{2}r\pi = \text{arc.} : \text{Arc.}$,
oder $1 : r = \text{arc.} : \text{Arc.}$,
also $\text{Arc.} = \text{arc.} \times r$.

IV. Zusatz: Die Größe eines Kreisbogens kann also auf eine dreifache Weise bestimmt werden:

a) Durch das Verhältniß des Bogens zum Quadranten, das ist, in Graden, Minuten und Sekunden, in dieser Beziehung ist der Bogen seinem Zentriwinkel gleich (§. 62. Zus. III.); dann

b) Durch das Verhältniß des Bogens zum Radius, so daß man bei der Bestimmung den Radius zur Einheit nimmt, man nennt dieses die relative Größe des Bogens; und endlich

c) Durch das Verhältniß desselben zum gewöhnlichen Längenmaaße, z. B. zum Fußmaaße, man heißt dieß die wahre oder absolute Größe des Bogens.

Anmerkung: Weil man in der Trigonometrie, und überhaupt in der höhern Mathematik die relative Größe der Kreisbögen öfter braucht, so wurden dieselben für die einzelnen Grade, Minuten und Sekunden berechnet, und werden den trigonometrischen Tafeln in besondern Tabellen gewöhnlich beigefügt.

II. Theil der Geometrie.

Die Planimetrie.

I. Hauptstück.

Von der Gleichheit und Verwandlung der Figuren.

§. 135.

I. Lehrsatz:

Wenn man im Parallelogramme durch einen beliebigen Punkt der Diagonallinie zwei gerade Linien mit der Seite des Parallelogrammes parallel zieht, so entstehen vier Parallelogramme, von welchen jene zwei dem Flächeninhalte nach einander gleich sind, durch welche die Diagonallinie nicht durchgeht.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 102.) im Parallelogramme AC die Diagonallinie AC gezogen, und durch ihren Punkt F die Linie HK parallel zu BA, und EG parallel zu AD;

2) Weil HK # AB, und EG # AD, so ist auch HK # CD, und EG # BC (§. 41. Zus. III.), weßhalb die Vierecke AF, FC, BF und FD Parallelogramme sind (§. 48. a.);

3) Die Diagonal halbirt jedes Parallelogramm (§. 48. Zus. IV.), daher ist

$\triangle$ AEF = $\triangle$ AKF,
und $\triangle$ FHC = $\triangle$ FGC,

also $\triangle$ AEF + $\triangle$ FHC = $\triangle$ AKF + $\triangle$ FGC,
ferner ist $\triangle$ ABC = $\triangle$ ADC,

mithin $\triangle$ ABC — ($\triangle$ AEF + $\triangle$ FHC)
= $\triangle$ ADC — ($\triangle$ AKF + $\triangle$ FGC),

folglich □ BF = □ KG, d. h., jene zwei Parallelogramme BF und KG sind einander gleich, durch welche die Diagonallinie AC nicht durchgeht.

I. Zusatz: Ist das gegebene Parallelogramm eine Raute, so sind die zwei Parallelogramme, durch welche die Diagonallinie durchgeht, ebenfalls Rauten.

Denn ist (Fig. 103.) das Parallelogramme AC eine Raute (§. 50 c.), so ist AD = DC, somit der Winkel n = q (§. 21. Zus. I.), dann n ist = x (§. 41.) und x = y (§. 10. Zus. III.), also y = q, und FG = GC (§. 23.) = HC = HF, weßhalb das Parallelogramm HG eine Raute ist.

Eben so, wenn AC eine Raute ist, und somit AB = BC, ist der Winkel m = p, dann p = y, und y = x, also m = x, und AE = EF = FK = AK, d. h., das Parallelogramm AF ist ebenfalls eine Raute.

II. Zusatz: Ist (Fig. 103.) AC eine Raute, so sind BF und FD Rhomboiden (§. 50. d.) aus den Seiten AK und KD. Denn GD = AE (§. 41. Zus. IV.) = AK (Zus. I.), mithin sind die Linien AK und KD die Seiten von FD; eben so ist BH = AK, und EB = CG = FG = KD, folglich sind AK und KD auch die Seiten von BF.

III. Zusatz: Wenn der Winkel A = 90 Grad, so werden die Rauten EK und HG Quadrate (§. 50. a.), und die Parallelogramme BF und FD werden Rechtecke (§. 50. b.); ferner hat in dieser Voraussetzung das Quadrat EK zur Seite den Theil AK der Grundlinie AD, und das Quadrat HG hat zur Seite die Linie FG, welche dem Theile KD gleich ist (Zus. I.); und die beiden Rechtecke BF und FD haben zu ihren Seiten die nämlichen Theile AK und KD (Zus. II.).

IV. Zusatz: Wenn man (Fig. 103.) eine gerade Linie AD in zwei Theile AK und KD theilet, und über die ganze Linie AD das Quadrat AC verzeichnet, so besteht dieses aus den Quadraten von AK und KD, und aus zwei Rechtecken, von welchen AK und KD ebenfalls die Seiten sind (Zus. III.).

Anmerkung: Wenn gleich die Diagonallinie das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke theilet, so sieht man hier doch nur auf die Gleichheit des Flächeninhaltes, und macht deßhalb beim Beweise des vorstehenden Lehrsatzes zur Bezeichnung der gleichen Quantität der Dreiecke das Gleichheitszeichen (=); indem man hier auf die gleiche Qualität der Dreiecke, welche dieses Zeichen (∽) ausdrückt, keine Rücksicht nimmt.

§. 136.

Die Verwandlung der Figuren.

Eine Figur in eine andere verwandeln heißt eine Figur verzeichnen, welche der gegebenen dem Flächeninhalte nach gleich ist, und also mit derselben die nämliche Quantität hat.

Daher wird z. B. ein Dreieck in ein Parallelogramm verwandelt, wenn man ein Parallelogramm verzeichnet, das dem Flächeninhalte nach dem Dreiecke gleich ist, und also mit dem Dreiecke einerlei Größe, das ist, die nämliche Quantität hat.

§. 137.

I. Aufgabe, ein Parallelogramm in ein anderes verwandeln, welches eine gegebene Seite enthält.

Auflösung:

1) Man soll (Fig. 102.) das Parallelogramm KG in ein anderes Parallelogramm verwandeln, das die gegebene Linie MN zur Seite hat;

2) Man verlängere die Seite DG, und mache die Verlängerung GC = MN, und ziehe die gerade Linie CF, welche verlängert, die ebenfalls verlängerte Seite DK in einem Punkte A durchschneiden wird (§. 41. Zus. 1.);

3) Aus den Linien AD und DC und dem eingeschlossenen Winkel D verzeichne man das Parallelogramm DB nach Vorschrift des §. 49., und verlängere KF bis H, und GF bis E, man erhält das Parallelogramm BF als das verlangte Parallelogramm.

Beweis:

1) Das Viereck BF ist wieder ein Parallelogramm, weil in ihm beide Paare opponirter Seiten parallel sind, und es ist dem gegebenen Parallelogramm KG gleich (§. 135.);

2) Ferner ist die Seite EB = CG (§. 41. Zus. IV.), und CG = MN, also EB = MN, das ist, im Parallelogramme BF kömmt auch die gegebene Linie MN als Seite vor.

§. 138.

Bestimmung, in wie ferne Parallelogramme und Dreiecke zwischen Parallelen liegen.

a) Zwei Parallelogramme liegen zwischen Parallelen, wenn ihre Grundlinien in der einen, und die gegenüberstehenden Seiten in der andern Parallele liegen.

Daher liegen (Fig. 104.) die Parallelogramme EH und PN zwischen den Parallelen AB und CD, da ihre Grundlinien EF und PQ in der Parallele AB, und die opponirten Seiten GH und MN in der Parallele CD liegen.

b) Zwei Dreiecke liegen zwischen Parallelen, wenn ihre Grundlinien in der einen, und ihre Spitzen in der andern Parallele liegen.

Deßwegen liegen (Fig. 105.) die Dreiecke FEG und MNP zwischen den Parallelen AB und CD, da ihre Grundlinien in der Parallele AB, und ihre Spitzen E und M in der Parallele CD liegen.

I. Zusatz: Parallelogramme und Dreiecke zwischen einerlei Parallelen haben gleiche Höhen. Denn (Fig. 104.) die Perpendikel HR und NS sind die Höhen der Parallelogramme (§. 48. d.), und einander gleich (§. 41. Zus. V.); und aus dem nämlichen

Grunde sind (Fig. 105.) die Höhen EH und MK der beiden Dreiecke FEG und NMP einander gleich.

II. Zusatz: Parallelogramme, derer Grundlinien in einer geraden Linie liegen, und die gleiche Höhen haben, liegen zwischen Parallelen.

Denn (Fig. 104.) wenn die Grundlinien EF und PQ in der geraden Linie AB liegen, und die Höhen HR und NS einander gleich sind, und man zieht durch H und N die gerade Linie CD, so ist $HR \overset{=}{\#} NS$, also auch HN oder $CD \# AB$ (§. 48. Zus. VIII.); durch die Punkte H und N gibt es aber zu AB nur eine einzige Parallele, also liegen die opponirten Seiten GH und MN, die ebenfalls mit AB parallel sind, in der andern Parallele CD, und die Parallelogramme liegen in der angeführten Voraussetzung zwischen Parallelen.

III. Zusatz: Zwei Dreiecke, derer Grundlinien in einer geraden Linien liegen, und die gleiche Höhe haben, liegen zwischen Parallelen.

Zieht man (Fig. 105.) durch die Spitzen E und M die gerade Linie CD, so ist $EH \overset{=}{\#} MK$, also EM oder $CD \# AB$, und die Dreiecke liegen zwischen den Parallelen AB und CD.

§. 139.

II. Lehrsatz:

Parallelogramme von einerlei Grundlinien sind gleich, wenn sie zwischen Parallelen liegen.

Beweis:

1) Wenn zwei Parallelogramme zwischen Parallelen liegen, und eine gemeinschaftliche Grundlinie haben, so kann die opponirte Seite des zweiten Parallelogrammes eine dreifache Lage haben:

a) Es kann (Fig. 106.) der Anfangspunkt D der Seite DE zugleich der Endspunkt der andern opponirten Seite sein;

(b

b) Oder (Fig. 107.) es kann der Anfangspunkt E der Seite EF innerhalb der andern opponirten Seite CD sein;

c) Oder es kann endlich (Fig. 108.) der Anfangspunkt E der Seite EF außerhalb der opponirten Seite CD liegen.

2) Im ersten Falle (Fig. 106.) ist

$CD = AB$, und $AB = DE$,

also $CD = DE$
dann $AC = BD$
und $AD = BE$ } §. 48. Zus. V.

mithin $\triangle ACD = \triangle BDE$ (§. 24.),
ferner $\triangle ADB = \triangle ADB$,

also $\triangle ACD + \triangle ADB = \triangle BDE + \triangle ADB$,
folglich ist das Parallelogramm $BC = AC$.

3) Im zweiten Falle (Fig. 107.) ist wieder

$CD = AB$, und $AB = EF$,

also $CD = EF$
dann $ED = ED$

mithin $CD - ED = EF - ED$, das ist, weil CE, ED und DF in einer geraden Linie liegen

$CE = DF$
dann $AC = BD$
und $AE = BF$

also $\triangle ACE = \triangle BDF$.
ferner Trap. $AD = AD$

also $\triangle ACE +$ Trap. $AD = \triangle BDF +$ Trap. AD,
folglich ist das Parallelogramm $AD = AF$.

4) Im dritten Falle endlich (Fig. 108.) ist ebenfalls

$CD = AB$, und $AB = EF$,

also $CD = EF$,
dann $DE = DE$,

mithin $CD + DE = EF + DE$,
oder $CE = DF$,
ferner $AC = BD$,
und $AE = BF$,

folglich $\triangle ACE = \triangle BDF$,

dann $\triangle DGE = \triangle DGE$,
und $\triangle AGB = \triangle AGB$,

also $\triangle ACE - \triangle DGE + \triangle AGB$
$= \triangle BDF - \triangle DGE + AGB$,
folglich ist das Parallelogramm AD = AF.

Zusatz: Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich.

Denn man lege die Grundlinien auf einander, so kongruiren sie (§. 3. Zus. V.); nun haben die Parallelogramme die nämliche Grundlinie, und eine gleiche Höhe, also liegen sie zwischen Parallelen (§. 138. Zus. II.), folglich sind sie nach dem aufgestellten Lehrsatze einander gleich.

Anmerkung: Daß hier unter der Gleichheit der Figuren nur ihre gleiche Quantität oder ihr gleich großer Flächeninhalt verstanden wird, ist schon am Schlusse des §. 135. bemerkt worden. Man muß nämlich zwischen ähnlichen, gleichen, und kongruenten Figuren genau unterscheiden; die Aehnlichkeit der Figuren bestimmt die gleiche Qualität, die Gleichheit der Figuren die gleiche Quantität, und die Kongruenz derselben die gleiche Qualität und Quantität zugleich, was durch die drei verschiedenen Zeichen „∽, = und ≌“ angezeigt wird.

§. 140.

II. Aufgabe, ein Parallelogramm in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung:

1) Man theile (Fig. 109.) im Parallelogramme AC eine Seite AD in drei gleiche Theile (§. 86.), und ziehe durch die Theilungspunkte E und F zur anliegenden Seite AB oder DC die Parallelen EG und FH (§. 39.);

2) Es wird dadurch das Parallelogramm AC in drei gleiche Theile getheilt, indem die Parallelogramme AG, EH und FC gleiche Grundlinien haben, dann zwischen Parallelen liegen, und deßhalb einander gleich sind (§. 139. Zus.)

§. 141.

III. **Aufgabe**, ein Parallelogramm in ein anderes mit einem gegebenen Winkel zu verwandeln.

Auflösung:

1) Man verzeichne (Fig. 108.) den gegebenen Winkel a an die Seite AB des gegebenen Parallelogrammes AD, so daß GAB = a (§. 25.);

2) Man verlängere die Linien AG und CD, und ziehe durch B die Parallele BF zu AE (§. 39.), so werden die Linien AE und BF die verlängerte Linie CD schneiden, und man erhält das verlangte Parallelogramm AF.

Beweis:

Das Viereck AF ist ein Parallelogramm (§. 48. a-), und dem gegebenen Parallelogramme AD gleich (§. 139.); dasselbe enthält ferner den gegebenen Winkel a, und man hat das Parallelogramm AD in das Parallelogramm AF mit dem gegebenen Winkel a verwandelt.

Zusatz: Ist der gegebene Winkel a ein rechter Winkel, also 90°, so wird das neue Parallelogramm ein Rechteck; daher läßt sich jedes Parallelogramm in ein Rechteck verwandeln.

§. 142.

IV. **Aufgabe**, das Parallelogramm in ein anderes mit einem gegebenen Winkel, und einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Auflösung:

1) Man verwandle das gegebene Parallelogramm A in ein anderes B, welches die gegebene Seite enthält (§. 137.);

2) Dieses Parallelogramm B verwandle man wieder in ein anderes C, welches den gegebenen Winkel enthält (§. 141.).

Man erhält auf diese Weise ein Parallelogramm C, welches die gegebene Seite, und den gegebenen Winkel enthält.

Zusatz: Ist der gegebene Winkel ein rechter Winkel, so wird das Parallelogramm C ein Rechteck; daher läßt sich jedes Parallelogramm in ein Rechteck von einer gegebenen Seite verwandeln.

Anmerkung: Die Parallelogramme sind hier der Kürze wegen mit einem einzigen Buchstaben allgemein bezeichnet worden, damit man sie auf diese Weise, indem auf keine bestimmte Figur hingewiesen wird, von einander unterscheiden kann.

§. 143.

III. Lehrsatz:

Das Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogrammes, welches mit ihm gleiche Grundlinien und gleiche Höhe hat.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 110.) das Dreieck CAB gegeben, und man verzeichne über die Seiten CA und AB, und den eingeschlossenen Winkel CAB das Parallelogramm AD (§. 49.), so hat dieses mit dem Dreiecke die nämliche Grundlinie und Höhe (§. 41. Zus. V.);

2) Ferner ist das Dreieck ACB = ½ Parallelogr. AD, und jedes Parallelogramm, welches mit AD, folglich mit dem Dreiecke ACB gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat, ist dem Parallelogramme AD gleich (§. 139. Zus.);

3) Daher ist das Dreieck die Hälfte eines jeden solchen Parallelogrammes.

1. Zusatz: Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich. Denn man denke sich über jedes Dreieck ein Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe, so ist nach dem Lehrsatze dieses §. jedes Dreieck die Hälfte seines Parallelogrammes; ferner sind diese Parallelogramme einander gleich (§. 139. Zus.), also sind es auch die Dreiecke als ihre Hälften.

II. Zusatz: Mehrere Dreiecke von gleicher Höhe sind zusammen einem Dreiecke gleich, welches die nämliche Höhe, und die Summe aller Grundlinien zur Basis hat.

Haben (Fig. 106.) die Dreiecke ACD, ADB und BEF gleiche Höhe, so sind sie (Fig. 111.) dem Dreiecke abc gleich, wenn dasselbe die nämliche Höhe hat, und seine Basis der Summe der Grundlinien dieser Dreiecke gleich ist, mithin ac = CD + AB + BF.

Denn trägt man diese Grundlinien auf der Basis ac auf, so daß ad = CD, dann de = AB, und ec = BF, und zieht man im Dreiecke abc die geraden Linien bd und be, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \triangle\ abd = ACD \\ \triangle\ dbe = ADB \\ \triangle\ ebc = BEF \end{array}\right\} \text{(Zus. I.)},$$

mithin $\triangle$ abd + $\triangle$ dbe + $\triangle$ ebc = $\triangle$ ACD + $\triangle$ ADB + $\triangle$ BEF;

folglich ist $\triangle$abc = $\triangle$ ACD + $\triangle$ ADB + $\triangle$ BEF.

III. Zusatz: Ein Dreieck ist so groß wie ein Parallelogramm, welches die nämliche Höhe, aber nur die halbe Grundlinie des Dreieckes zur Basis hat.

Denn (Fig. 112.) man verzeichne (§. 49.) über CA, AB und den Winkel A das Parallelogramm AE, so ist das Dreieck CAB = ½AE (Lehrs.); ist nun AF = BF, so ist □ AD = □ FE = ½ □ AE (§. 139.), mithin ist $\triangle$ CAB = □ AD = □ FE.

§. 144.

V. Aufgabe, ein Dreieck in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung:

1) Ist (Fig. 113.) das Dreieck in vier gleiche Theile zu theilen, so theile man die Basis AC in vier gleiche Theile (§. 86.);

2) Zu den Theilungspunkten D, E und F ziehe man von der Spitze B die geraden Linien BD, BE

und BF, so ist das Dreieck ABC in die vier gleiche Theile ABD, DBE, EBF und FBC getheilt, indem diese Dreiecke die nämliche Höhe (§. 33. Zus. IV.), und gleiche Grundlinien haben (§. 143. Zus. I.).

§. 145.

VI. Aufgabe, ein Dreieck in ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel zu verzeichnen.

Auflösung:

1) Man halbire (Fig. 112.) die Basis AB des Dreieckes ACB (§. 27.), und verzeichne über FB am Punkte F den gegebenen Winkel a (§. 25.), so daß GFB = a;

2) Durch C ziehe man zu AB die Parallele CH (§. 39.), verlängere den Schenkel FG, bis er CH schneidet (§. 41. Zus. I.), und ziehe durch B bis C die Linie BH parallel zu FG, so ist FH das verlangte Parallelogramm (§. 48. a.), welches den gegebenen Winkel a = GFB enthält, und dem Dreiecke ACB gleich ist (§. 143. Zus. III.).

Zusatz: Ist der gegebene Winkel a ein rechter Winkel, also a = 90°, so wird das Parallelogramm ein Rechteck; daher läßt sich jedes Dreieck in ein Rechteck verwandeln.

§. 146.

VII. Aufgabe, ein Dreieck in ein Parallelogramm mit einem bestimmten Winkel, und einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Auflösung:

1) Man verwandle das gegebene Dreieck A in ein Parallelogramm B mit dem gegebenen Winkel (§. 145.);

2) Das Parallelogramm B verwandle man in ein anderes Parallelogramm C mit der bestimmten Seite (§. 137.);

3) Weil nun das Parallelogramm C = B, dann das Parallelogr. B = A, so ist das Parallelogr. C = Parallelogr. A, und es ist C das verlangte Parallelogramm mit einem bestimmten Winkel und einer gegebenen Seite.

Zusatz: Ist der gegebene Winkel ein rechter Winkel, so wird das Parallelogramm C ein Rechteck (§. 48. Zus. IV.); daher läßt sich jedes Dreieck in ein Rechteck mit einer gegebenen Seite verwandeln.

§. 147.

VIII. Aufgabe, eine geradlinigte Figur in mehrere Trapezen zu theilen.

Auflösung:

1) Man ziehe inner, oder außer der Figur, oder an ihrer Gränze eine unbestimmte gerade Linie, und fälle auf sie von allen Ecken der Figur Perpendikel (§. 33.);

2) Zieht man die unbestimmte gerade Linie innerhalb der Figur, wie bei Figur 114., so verlängere man die Perpendikel bis zur gegenüberstehenden Gränze, somit das Perpendikel Bb bis B, dann Cc bis C ꝛc.;

3) Es werden auf diese Weise die geradlinigten Figuren in lauter Trapezen getheilt, nämlich (Fig. 114.) das Siebeneck ABDEFGC zerfällt in die Trapezen BAB, dann BBCC, CCDD ꝛc., und (Fig. 115.) das Sechseck ABCDEF in die Trapezen BbA, BbCc, CcDd ꝛc., indem man die dabei vorkommenden Dreiecke als Trapezen betrachten kann, bei welchen die kleinere Parallele gleich Null ist.

Anmerkung: 1) Gewöhnlich nimmt man die gerade Linie, auf welche die Perpendikel gezogen werden, innerhalb der Figur, oder an ihrer Gränze an; in welchem letzteren Falle eine Seite des Perimeters, wenn es nöthig ist, verlängert wird, um darauf von allen Ecken der Figur Perpendikel zu ziehen, wie dieses bei Figur 115. in Absicht auf die Seite AF geschehen ist.

2) Die gerade Linie, welche auf diese Weise angenommen wird, um auf sie von den Ecken der Figur Per-

pendikel zu ziehen, heißt die Basis, Grundlinie, oder auch Abszissenlinie; und die Perpendikel nennt man die rechtwinklichten Ordinaten, oder bloß die Ordinaten der Figur (§. 102. Zus. II.).

§. 148.

IV. Lehrsatz:

Wenn man im rechtwinklichten Dreiecke über die Hypotenuse, und über die zwei Katheten Quadrate verzeichnet, so ist das Quadrat der Hypotenuse der Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 116.) das rechtwinklichte Dreieck ABC gegeben, und man verzeichne die Quadrate AQ, AE und CF (§. 50. Anm. 1.);

2) Aus B ziehe man das Perpendikel BL, und verlängere es bis zur Seite HQ (§. 41. Zus. II.), so ist LP parallel zu AH und CQ, und deßwegen sind die Vierecke AP und PC Parallelogramme (§. 48. a.);

3) Man ziehe ferner DC und BH, so ist, weil man Quadrate verzeichnete (§. 50. a.) der Winkel

$$r = s = 90°,$$

$$\text{dann } q = q,$$

$$\text{also } r + q = s + q, \text{ oder } DAC = BAH,$$

$$\text{ferner ist } DA = AB,$$

$$\text{und } AC = AH,$$

$$\text{mithin } \triangle DAC = \triangle BAH \text{ (§. 20.)};$$

4) Zieht man auf der andern Seite die Linien AG und BQ, so findet man aus den nämlichen Gründen, daß

$$\triangle ACG = \triangle BCQ;$$

5) Das Dreieck DAC hat mit dem Quadrate AE die nämliche Grundlinie DA, und eine gleiche Höhe (§. 41. Zus. V.), und eben so das Dreieck BAH mit dem Parallelogramme AP; daher ist (§. 143.)

$$\triangle DAC = \tfrac{1}{2} \square AE,$$
und $\triangle BAH = \tfrac{1}{2} \square AP,$
dann nach Nro. 3. ist $\triangle DAC = \triangle BAH,$

also $\tfrac{1}{2} \square AE = \tfrac{1}{2} \square AP$, und $\square AE = \square AP$;

6) Auf die nämliche Weise hat das Dreieck GCA mit dem Quadrate CF, und das Dreieck BCQ mit dem Parallelogramme CP eine gleiche Grundlinie und Höhe, weßhalb

$$\triangle GCA = \tfrac{1}{2} \square CF,$$
und $\triangle BCQ = \tfrac{1}{2} \square CP,$
dann nach Nro. 4. ist $\triangle ACG = \triangle BCQ,$

also $\tfrac{1}{2} \square CF = \tfrac{1}{2} \square CP$, und $\square CF = \square CP$;

7) Endlich ist nach Nro. 5.

$$\square AP = \square AE,$$
und nach Nro. 6. ist $\square CP = \square CF,$

also $\square AP + \square CP = \square AE + \square CF,$
oder $\square AQ = \square AE + \square CF,$

das heißt, $AC^q = AB^q + BC^q$.

Es ist also im rechtwinklichten Dreiecke das Quadrat der Hypotenuse der Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich.

§. 149.

V. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke das Quadrat einer Seite der Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten gleich ist, so ist das Dreieck rechtwinklicht.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 117.) das Dreieck BAC gegeben, bei welchem $BC^q = AB^q + AC^q$;

2) Man errichte am Punkte A auf AB das Per-

pendikel AD (§. 45.), und mache es gleich AC, so ist (§. 50. Zus. III.)

$$AD^q = AC^q,$$
$$\text{dann } AB^q = AB^q,$$

$$\text{also } AD^q + AB^q = AC^q + AB^q,$$
$$\text{nach Nro. 1. ist } BC^q = AB^q + AC^q,$$
$$\text{und nach §. 148. ist } BD^q = AD^q + AB^q,$$

$$\text{also ist } BD^q = BC^q,$$
$$\text{und } BC = BD \text{ (§. 51. Zus. I.)},$$
$$\text{dann } AD = AC \text{ (ex constr.)},$$
$$\text{und } AB = AB,$$

$$\text{also } \triangle ABD \cong \triangle ABC \text{ (§. 24.)}$$

und $m = n$ (§. 18. Zus. IV.), nun ist nach Nro. 2. der Winkel $m = 90^\circ$ (§. 9. Zus. IV.), also ist auch $n = 90^\circ$.

Es ist also das Dreieck BAC rechtwinklicht, und der Winkel n, der der Seite BC gegenüber steht, ist der rechte Winkel.

Anmerkung: Man vergleiche diesen und den vorhergehenden §. mit dem §. 97. und dem I. Zusatze des §. 97.

§. 150.

IX. **Aufgabe**, mehrere Quadrate, derer Seiten gegeben sind, in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung:

1) Man trage (Fig. 118.) auf den Schenkeln eines rechten Winkels die beiden Seiten a und b von zwei Quadraten auf, und ziehe die Hypotenuse f, so ist $f^q = a^q + b^q$ (§. 148.);

2) An einem Ende der Seite f errichte man ein Perpendikel (§. 45.), und mache es der Seite c des

dritten Quadrates gleich, ziehe wieder die Hypotenuse g, so ist $g^q = f^q + c^q = a^q + b^q + c^q$;

3) Man errichte an einem Endspunkte der Linie g wieder ein Perpendikel, mache es der Seite d des vierten Quadrates gleich, und ziehe die Hypotenuse h, so ist $h^q = g^q + d^q = a^q + b^q + c^q + d^q$;

4) Verzeichnet man aus f, g und h Quadrate, so ist das erste den beiden Quadraten aus a und b zusammen genommen gleich, das zweite den dreien aus a, b und c, und das dritte allen Vieren zusammen genommen gleich.

I. Zusatz: Wenn $a = b$, mithin $a^q = b^q$, so ist $f^q = a^q + a^q = 2a^q$; daher läßt sich jedes Quadrat verdoppeln, d. h., man kann allemal ein Quadrat verzeichnen, welches das Duplum des gegebenen Quadrates ist.

II. Zusatz: Ein gegebenes Quadrat wird halbirt, so daß die Hälfte wieder ein Quadrat ist, wenn man an beiden Enden einer Seite des Quadrates Perpendikel errichtet (§. 45.), die dadurch erhaltenen rechten Winkel halbirt (§. 26.), die halbirenden Linien verlängert, bis sie sich schneiden (§. 40.), und über einen Schenkel des dadurch erhaltenen gleichschenklichten rechtwinklichten Dreieckes ein Quadrat verzeichnet (§. 51. Anm. 1.).

Denn wenn (Fig. 116.) jeder der Winkel q und m die Hälfte eines rechten Winkels ist, so daß $q = m = 45$ Grad, so ist $AB = BC$ (§. 23.), also $AB^q = BC^q$ (§. 50. Zus. III.); ferner $AC^q = AB^q + BC^q$ (§. 148)., folglich $AC^q = AB^q + AB^q = 2AB^q$, und $AB^q = \frac{1}{2}AC^q$, d. h., das über AB verzeichnete Quadrat AE ist die Hälfte des gegebenen Quadrates AQ, über dessen Seite AC an den Endspunkten A und C die halben rechten Winkel q und m verzeichnet wurden.

§. 151.

VI. Lehrsatz:

Ein in den Kreis beschriebenes reguläres Vieleck ist einem Dreiecke gleich, welches den Perimeter zur Grundlinie, und die Entfernung einer Seite vom Mittelpunkte zur Höhe hat.

Beweis:

1) Zieht man (Fig. 100.) vom Zentrum C an alle Ecke des in dem Kreis beschriebenen regulären Sechseckes Radien, so wird das Vieleck in so viele kongruente Dreiecke getheilt, als es Seiten hat (§. 127. Zus. II.);

2) Nimmt man eine solche Seite allemal als Grundlinie an, so ist die Entfernung derselben vom Mittelpunkte die Höhe, und für alle Dreiecke gleich (§. 126.);

3) Daher sind alle diese Dreiecke zusammen, oder das ganze Vieleck einem Dreiecke gleich, welches die nämliche Höhe, und die Summe aller Seiten oder den Perimeter zur Grundlinie hat (§. 143. Zus. II.).

Zusatz: Der Kreis ist einem Dreiecke gleich, welches den Radius zur Höhe und die Peripherie zur Basis hat (§. 130. Zus. II.).

II. Hauptstück.

Von Verhältnissen, und von der Bestimmung des Flächeninhaltes der Figuren.

§. 152.

I. Lehrsatz:

Wenn die Seite eines Quadrates in der Grundlinie eines Rechteckes m mal, und in der anliegenden Seite n mal enthalten ist, so ist das Quadrat im Rechtecke so vielmal enthalten, als die Zahl 1 im Produkte mn, oder das Rechteck ist mn mal größer, als das Quadrat.

Beweis:

1) Wenn (Fig. 119.) die Seite ab des Quadrates ad in der Seite AB des Rechteckes m mal enthalten ist, so läßt sich das Quadrat ad längs AB im Rechtecke m mal neben einander legen, mithin ist das Rechteck oder Rectang. As = m . ad;

2) Das Rechteck As läßt sich so oft längs AC anlegen, als die Seite ab oder ac des Quadrates in der Seite AC enthalten ist; wenn nun AC = n . ac, somit n ausdrückt, wie oft ac in AC enthalten ist, so ist das Rechteck AD = n . As = mn . ad, das ist, das Rechteck AD enthält mn solche Quadrate, wie das Quadrat ad ist;

3) Die Größe AD läßt sich in die Faktoren 1 und AD auflösen (Arithm. III. §. 87. Nro. II.), so daß AD = 1 × AD, und also 1 × AD = m × ad; verwandelt man diese Gleichung in eine geometrische Proportion (Arithm. IV. §. 35. Zus. VI.), so verhält sich 1 : mn = ad : AD, oder ad : AD = 1 : mn, d. h., das Quadrat ad ist im Rechtecke AD so oft enthalten, als 1 im Produkte mn.

Ist daher z. B. die Linie AB = 5 . ab, und AC = 3 . ab, so ist das Rechteck AD = 15 . ad, und

ad : AD = 1 : 15, das ist, das Rechteck AD ist seinem Flächeninhalte nach 15 Quadraten ad gleich.

§. 153.
Das Maaß der Flächen.

a) Wird eine Quadratfläche von bekannter Größe angenommen, um ihr Verhältniß zu andern Flächen, und dadurch die Größe der letztern zu bestimmen, so nennt man die angenommene Quadratfläche das Maaß der Flächen, oder ein Flächenmaaß.

b) Eine Figur messen heißt ihr Verhältniß zum Flächenmaaße angeben, somit bestimmen, wie oft das Flächenmaaß, oder ein gewisser Theil, davon gesetzt werden muß, um die Fläche zu erhalten, welche gemessen wird.

I. Zusatz: Weil die eingeführten Flächenmaaße Quadratruthen, Quadratschuhe, Quadratzolle ꝛc. genannt werden (Arithm. I. §. 80.), so wird eine Fläche gemessen, wenn man ihre Größe in Quadratruthen, Quadratschuhen, Quadratzollen ꝛc. angibt, d. h., wenn man bestimmt, wie viele Quadratruthen, Quadratschuhe, Quadratzolle ꝛc. eine gewisse Fläche hat.

II. Zusatz: Ein Rechteck wird gemessen, wenn man zwei Seiten, die einen Winkel einschliessen, mit einerlei Längenmaaße mißt, und die Zahlen mit einander multiplizirt (§. 152.); hat man z. B. die Linien durch Ruthen oder Fuß gemessen, so gibt das Produkt den Flächeninhält des Rechteckes in Quadratruthen oder in Quadratschuhen an.

Daher wird (Fig. 119.) das Rechteck AD gemessen, wenn man mit dem nämlichen Längenmaaße die Linien AB und AC mißt, und die erhaltenen Zahlen mit einander multiplizirt.

III. Zusatz: Mißt (Fig. 119.) das gebrauchte Längenmaaß ab, oder die Seite des Quadrates ad die beiden Seiten AE und AM des Rechteckes AN nicht genau, und ist AB = m . ab und AC = n . ab, so ist AD = mn . ad, und das Rechteck AN ist um den

außer AD liegenden Streifen größer als das Rechteck AD. Sind nun die Theile BE und CM kleiner als ab, so nimmt man von ab einen bestimmten Theil, etwa den 10ten, und mißt damit die Stücke BE und CM; geht die Messung nicht genau aus, so nimmt man wieder kleinere Theile, und bestimmt sich den überbleibenden Streifen, oder den Unterschied zwischen den Rechtecken AN und AD so genau, als man will, oder es die vorliegende Aufgabe erfordert.

Hat man auf diese Weise die Linien AE und AM gemessen, so drückt man ihre Größe durch Reduktion im nämlichen Längenmaaße aus (Arithm. I. §. 90.), und multiplizirt dann die erhaltenen Zahlen mit einander. Ist z. B. die Linie AE = 5 Fuß 8 Zoll = 5,8 Fuß, und AM = 3 Fuß 6 Zoll = 3,6 Fuß, indem im Dezimalmaaße der Zoll der 10te Theil des Fußes ist (Arithm. I. §. 79.), so ist das Rechteck AN = AE × AM = 5,8 × 3,6 = 20,88 Quadratfuß = 20 □ Fuß 88 □ Zoll (Arithm. III. §. 14.).

IV. Zusatz: Drückt B die Zahl aus, wie vielmal das gebrauchte Maaß in der Grundlinie, und A die Zahl, wie vielmal eben dieses Maaß in der Höhe des Rechteckes enthalten ist, so gibt A × B, oder A . B den Flächeninhalt des Rechteckes an; daher bedeutet die in der Anwendung bequeme Formel Rectang. = A . B eben so viel, als das Produkt der Grundlinie in die Höhe gebe den Flächeninhalt des Rechteckes.

V. Zusatz: Wenn C die Größe der Seite eines Quadrates angibt, so bestimmt C^2 den Flächeninhalt des Quadrates; da beim Quadrate die Grundlinie $B = C$, und die Höhe $A = C$ ist (§. 50. a.), und also $B . A = C . C = C^2$.

VI. Zusatz: Setzt man (Fig. 103.) im Quadrate AC die Länge der Seite $AD = C$, von $AK = a$, und $KD = b$, so ist (Zus. V.) der Flächeninhalt des Quadrates $AC = C^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mithin dem aufgestellten allgemeinen Quadrirungsgesetze gemäß (Arithm. IV. §. 1.), nach welchem $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Anmerkung: 1) Im §. 167. werden mehrere Beispiele

zur Berechnung des Flächeninhaltes der Figuren angeführt werden.

2) Im §. 80. des I. Theiles des arithmetischen Lehrbuches findet man die in Baiern üblichen Flächenmaaße ausführlich angeführt, und den Quadratfuß nach dem Duodezimal- und Dezimalmaaße in Tabellen abgetheilt.

3) Bestimmt man nach dem III. Zusatze die Seiten des Rechteckes in verschiedenen Längenmaaßen, so kann man mittels der Dezimalbrüche bequem die vorkommenden niedern Maaße in höheren ausdrücken, und dann die Multiplikation in Dezimalen vornehmen, wie dieses in dem beim III. Zus. angeführten Beispiele geschehen ist.

4) Der im §. 152. aufgestellte Lehrsatz zeigt in Betreff der Messung der Figuren, daß man ihren Flächeninhalt dadurch bestimmt, daß man mittels der Längenmaaße gewisse Linien mißt, und die gefundenen Zahlen mit einander multiplizirt, weßhalb die Flächen nicht unmittelbar durch Flächen, sondern nur durch gewisse Linien gemessen werden; indeß ist aber das Maaß der Fläche immer wieder eine Fläche, und die Größe des Flächeninhaltes kann nur in Flächen angegeben werden.

5) Daß der beim Ausdrucke A . B zwischen A und B gesetzte Punkt die Multiplikation anzeigt, indem jeder Buchstabe die Länge einer Linie abgibt, ist aus dem I. Theile der Arithmetik §. 45. f. ersichtlich.

§. 154.

I. Aufgabe, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung:

Man suche zu der Grundlinie B und zur Höhe A des Rechteckes die mittlere geometrische Proportionallinie *C* (§. 103.), und verzeichne über *C* ein Quadrat (§. 51. Anm. 1.), so ist dieses das verlangte, welches dem gegebenen Rechtecke gleich ist.

Beweis:

Wenn a, b und c die durch einerlei Maaß bestimmten Größen von A, B und C ausdrücken, so ist nach der Auflösung $c^2 = a . b$, ferner $c^2 = C^2$, und und $a . b =$ Rectang. (§. 153. Zus. IV. u. V.), mithin ist das gefundene Quadrat dem Rechtecke gleich.

I. Zusatz: Jede geradlinigte Figur läßt sich quadriren, das ist, in ein ihr gleiches Quadrat verwandeln; indem sich alle Figuren durch Diagonalen in Dreiecke (§. 53. Nro. 1.), jedes Dreieck in ein Rechteck (§. 145. Zus.), jedes Rechteck in ein Quadrat (Aufgabe), und alle diese Quadrate in eines verwandeln lassen (§. 150.).

II. Zusatz: Der Kreis läßt sich nicht quadriren. Denn da man aus dem Durchmesser die Peripherie erst finden muß (§. 133.), das Verhältniß des Diameters zur Peripherie aber nur durch Annäherung bestimmt ist, so läßt sich auch kein dem Kreise vollkommen gleiches Dreieck (§. 132. Zus. I.), mithin auch kein ihm gleiches Quadrat konstruiren.

Anmerkung: Man machte bisher auch auf dem Wege der Vermessung Versuche, das Verhältniß des Diameters zur Peripherie genau zu bestimmen, und darnach den Kreis zu quadriren; es gibt aber die Vermessung, wenn sie auch mit der größten Sorgfalt vorgenommen wird, kein genaues Resultat, und es läßt sich aus der gemessenen Peripherie und aus dem gemessenen Durchmesser eines Kreises unmöglich das Verhältniß dieser zwei Größen zu einander ganz genau angeben.

§. 155.

II. Aufgabe, den Flächeninhalt eines schiefen Parallelogrammes zu bestimmen.

Auflösung:

Man messe die Grundlinie und Höhe mit dem nämlichen Längenmaaße, und multiplizire die Zahlen, welche die Größe dieser Linien angeben, mit einander, so gibt das Produkt den Flächeninhalt, das ist:

$$\text{Parallelogramm} = B \cdot A.$$

Beweis:

1) Ein Rechteck ist dem Flächeninhalte nach dem schiefen Parallelogramme gleich, wenn es damit die nämliche Grundlinie und Höhe hat, indem es ebenfalls ein Parallelogramm ist (§. 48. a.), und Parallelogramme von gleichen Höhen und Grundlinien einander gleich sind (§. 139. Zus.);

2) Nun erhält man aber den Flächeninhalt eines Rechteckes, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplizirt (§. 153. Zus. IV.); also wird auch das schiefe Parallelogramm gemessen, wenn man die Grundlinie und Höhe mit einerlei Maaß mißt, und diese beiden Zahlen mit einander multiplizirt.

I. Zusatz: Parallelogramme stehen im zusammengesetzten geraden Verhältnisse mit ihren Grundlinien und Höhen.

Denn drückt man die Grundlinie und Höhe des einen Parallelogrammes durch B und A, und die des andern durch b und a aus, so ist nach der vorstehenden Auflösung:

PARALL. = B . A,

und parall. = b . a, also (Arithm. II. §. 50. d.)

PARALL. : parall. = B . A : b : a.

Es sind daher die Parallelogramme mit ihren Grundlinien und Höhen im zusammengesetzten geraden Verhältnisse (Arithm. IV. §. 44. Zus. II.).

II. Zusatz: Parallelogramme von gleichen Grundlinien sind mit ihren Höhen, und bei gleichen Höhen mit ihren Grundlinien gerade proportionirt. Denn

PAR. : par. = B . A : b . a (Zus. I.)

= A : a, wenn B : b }
= B : b, wenn A : a } Arithm. IV. §. 41.

III. Zusatz: Bei gleichen Parallelogrammen sind die Grundlinien mit den Höhen umgekehrt proportionirt. Denn PAR. = B . A, und par. = b . a, also, wenn PAR. = par., ist B . A = b . a, und B : b = a : A, d. h., die Grundlinien sind in dieser Voraussetzung mit den Höhen umgekehrt proportionirt (Arithm. II. §. 60.).

§. 156.

III. Aufgabe, den Flächeninhalt eines Dreieckes zu finden.

Auflösung:

Man messe die Grundlinie und Höhe mit einerlei Maaß, multiplizire die beiden erhaltenen Zahlen mit

einander, und dividire das Produkt durch 2; das heißt:

$$\triangle = \frac{B \cdot A}{2} = \tfrac{1}{2}B \cdot A = \tfrac{1}{2}A \cdot B.$$

Beweis:

Das Produkt B . A gibt den Flächeninhalt eines Parallelogrammes, welches mit dem Dreiecke die nämliche Grundlinie B, und die nämliche Höhe A hat (§. 155.); nun ist aber das Dreieck die Hälfte eines solchen Parallelogrammes (§. 143.), folglich gibt die Hälfte dieses Produktes, oder $\frac{B \cdot A}{2}$ den Flächeninhalt des Dreieckes.

I. Zusatz: Man findet den Inhalt eines in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes, wenn man den Perimeter, und die Entfernung einer Seite vom Mittelpunkte des Kreises mit dem nämlichen Längenmaaße mißt, und das Produkt der erhaltenen Zahlen mit 2 dividirt; indem ein solches reguläres Vieleck einem Dreiecke gleich ist, das den Perimeter zur Basis, und den Abstand einer Seite vom Zentrum zur Höhe hat (§. 151.).

II. Zusatz: Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Produkte aus der Peripherie in den Radius (§. 151. Zus.).

Drückt man den Flächeninhalt des Kreises durch C, den Durchmesser durch d, und den Radius durch r aus, so ist $C = p \times \tfrac{1}{2}r = 2r\pi \times \tfrac{1}{2}r$ (§. 133. Zus. I.) $= r^2\pi$; ferner $r = \tfrac{1}{2}d$ (§. 14. Zus. III.), also $r^2 = \tfrac{1}{4}d^2$, und die Kreisfläche, oder $C = \tfrac{1}{4}d^2\pi = \tfrac{1}{4}\pi \cdot d^2$.

Anmerkung: Da ein Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln ist, wenn man den Umfang des Vieleckes zur Grundlinie, und das Perpendikel zur Höhe des Dreieckes nimmt, und da der Kreis als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet werden kann; so ist auch der Kreis einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie die Peripherie, und dessen Höhe der Halbmesser ist. Der In-

halt des Kreises wird also gefunden, wenn man die Peripherie mit dem halben Radius multiplizirt, oder $C = p \times \frac{1}{2}r$ (II. Zus.). Man kann Figuren durch Quadrate ausrechnen, und sie in solche verwandeln. Quadratur also ist die Findung der Fläche dem Inhalte nach. Hauptsächlich aber ist dieser Name vom Kreise und von andern Curven (krummlinigten Figuren) gewöhnlich. Wüßte man im Kreise das Verhältniß des Diameters zur Peripherie in vollkommener Schärfe, so könnte man auch den Kreis vollkommen quadriren. Da $p = d\pi$ auch durch π bestimmt wird, und π keine volle Gleichheit, wenn auch eine unendliche Näherung, gewährt; so kann C (die Kreisfläche) nie in einer vollständigen Gleichung gefunden werden. Die Infinitesimalrechnung liefert in schnell abnehmenden unendlichen Reihen für die Quadratur des Kreises dieselben Zahlen, wie die niedere Geometrie. Aber es läßt sich bis jetzt auch kein genaues Integral angeben; z. B. für $a = d = 2$ und $x = r = 1$ sucht man die Kreisfläche auch so:

a) $\int y dx$ = Curvenfläche; b) $y^2 = ax - x^2$ = Kreisesgleichung; c) $y = \sqrt{ax - x^2} = (ax - x^2)^{1/2}$ d) $y dx = dx(ax - x^2)^{1/2} = x^{1/2} dx(a - x)^{1/2}$; e) $\int y dx = \int x^{1/2} dx(a - x)^{1/2}$. Dieß Integral läßt sich offenbar (da $(\frac{1}{2} + 1) : 1 = \frac{3}{2}$ keine positive ganze Zahl ist) nur durch eine unendliche Reihe finden, die dann π zum Resultate gibt.

Aus diesem ersiebt man die kleine Einsicht derer, die noch nach einer genauen Kreisquadratur forschen. Im Mercure de France 1762 lieset man, daß einer 25 Jahre darauf gewandt, und endlich Zahlen herausgebracht habe, wovon Kästner sagt: „Weil sie sich nicht so verhalten können, so hat der gute Mann seine 25 Jahre sehr übel zugebracht.“

Die mondförmigen Kreisausschnitte des Hippokrates (lunulae Hippocratis), die man genau quadriren kann, haben auf eine genaue Kreisquadratur keine Wirkung.

Von der Kreisquadratur hängt die Quadratur der Ellipsis ab.

III. Zusatz: Aus der bekannten Kreisfläche kann man in der Gleichung $C = r^2\pi$ den Radius, und in der Gleichung $C = \frac{1}{4}d^2\pi$ den Durchmesser des Krei-

ses berechnen; es ist $r = \sqrt{\frac{C}{\pi}}$, und $d = \sqrt{\frac{4C}{\pi}}$ (Arithm. IV. §. 20.).

IV. Zusatz: Man erhält den Flächeninhalt des Ausschnittes oder Sektors eines Kreises (§. 59. c.), wenn man den Bogen des Sektors mit dem halben Radius des Kreises multiplizirt, das ist, Sector $=$ Arc. $\times \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r$. Arc.

Wenn man (Fig. 61.) den Radius $AC = r$, dann den Bogen $ADB =$ Arc., und den Sektor ACBD $=$ Sect. setzet, so verhält sich

Sect. : Circ. $=$ Arc. : p,

oder Sect. : $r^2\pi$ $=$ Arc. : $2r\pi$ (Zus. II. u. §. 133. Z. I.),

also Sect. : r $=$ Arc. : 2 (Arithm. IV. §. 41.),

und Sect. $= \frac{\text{Arc.} \times r}{2} =$ Arc. $\times \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r$. Arc.

(Arithm. IV. §. 36.).

V. Zusatz: Man erhält den Flächeninhalt des Segments (§. 59. d.), wenn man von dem entsprechenden Sektor das durch die Radien und die Sehne des Ausschnittes begränzte Dreieck subtrahirt; das ist (Fig. 61.), der Abschnitt oder Segm. ABD $=$ Sect. ACBD $- \triangle$ ACB.

VI. Zusatz: Den Flächeninhalt des zwischen zwei Kreisen enthaltenen Ringes erhält man, wenn man die Verhältnißzahl π mit der Differenz der Quadrate der Radien multiplizirt.

Drückt man (Fig. 17.) den Radius des größern Kreises durch R, und den des kleinern Kreises durch r aus, so ist offenbar der zwischen den Peripherien beider Kreise enthaltene Ring oder Annulus $= R^2\pi - r^2\pi = \pi(R^2 - r^2)$; indem hier die Produkte in Faktoren aufgelöset werden (Arithm. III. §. 87. IV.), und man den Ring erhält, wenn man die kleinere Zirkelfläche von der größern abzieht.

VII. Zusatz: Zwei Dreiecke stehen im zusammengesetzten geraden Verhältnisse mit ihren Grundlinien

und Höhen, und bei gleichen Grundlinien sind dieselben mit den Höhen, und bei gleichen Höhen sind sie mit den Grundlinien gerade proportionirt; überdieß sind bei gleichen Dreiecken die Grundlinien mit den Höhen umgekehrt proportionirt. Denn alle diese Verhältnisse gelten von Parallelogrammen (§. 155. Zus. I — III.), also auch von ihren Hälften, den Dreiecken.

VIII. Zusatz: In der Gleichung $\triangle = \frac{B \cdot A}{2}$, welche den Flächeninhalt des Dreieckes angibt, kann man aus dem Flächeninhalte und der Grundlinie die Höhe, und aus dem Flächeninhalte und der Höhe die Grundlinie berechnen; es ist $A = \frac{2\triangle}{B}$, und $B = \frac{2\triangle}{A}$ (Arithm. III. §. 98.).

§. 157.

IV. Aufgabe, den Flächeninhalt eines Trapezes zu bestimmen.

Auflösung:

1) Man messe die beiden parallelen Seiten, und ihren Abstand, oder die Höhe mit einerlei Maaß, multiplizire die Summe der beiden ersten Zahlen mit der letzten, und dividire das Produkt durch 2, das ist:

$$\text{Trapez} = (B + b) \times \tfrac{1}{2}A.$$

Beweis:

1) Man ziehe (Fig. 120.) die Diagonal BD, so ist das Perpendikel BE, das den Abstand der Parallelen von einander bestimmt, die gemeinschaftliche Höhe der beiden Dreiecke ABD und BCD (§. 41. Zus. V.);

2) Mißt man mit dem nämlichen Maaße die Grundlinien AD und BC, und die Höhe BE, und bezeichnen die Buchstaben B, b und A die Größe dieser Linien in Zahlen, so ist nach §. 156.

$$\triangle ABD = B \times \tfrac{1}{2}A,$$
und $\triangle BCE = b \times \tfrac{1}{2}A,$

also $\triangle ABD + \triangle BCD = B \times \tfrac{1}{2}A + b \times \tfrac{1}{2}A,$
das ist, Trapez $AC = (B+b) \times \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}(B+b)A$
$= \frac{(B+b)A}{2}$ (Arithm. III. §. 53. Lehrs. VI.).

§. 158.

V. Aufgabe, den Flächeninhalt einer jeden geradlinigten Figur, wenn sie kein Dreieck ist, zu finden.

I. Auflösung:

Man theile die Figur durch Diagonalen in lauter Dreiecke (Fig. 56. u. 57.), bestimme nach §. 156. den Flächeninhalt eines jeden einzelnen Dreieckes, so gibt ihre Summe den Inhalt der ganzen Figur.

II. Auflösung:

Man theile die Figur in Trapezen (§. 147.), und suche den Inhalt eines jeden einzelnen Trapezes (§. 157.), so gibt ihre Summe den Flächeninhalt der ganzen Figur.

III. Auflösung:

1) Man theile die Figur in Trapezen (§. 147.), und bezeichne der Kürze wegen (Fig. 114.) die gemessene Länge von BB mit B, von CC mit C, von DD mit D ꝛc., das ist, die Länge jeder Parallele mit dem Buchstaben der Ecke, durch welche sie gezogen ist;

2) Eben so bezeichne man die mit dem nämlichen Maaße bestimmte Länge der Höhe ab vom ersten Trapeze und Dreiecke mit dem einzelnen Buchstaben b, die Länge ac mit c, dann ad mit d ꝛc.;

3) Nun subtrahire man von der ersten Parallele die dritte, von der zweiten die vierte, von der dritten die fünfte ꝛc., bis man alle auf diese Weise möglichen Reste erhält; den ersten Rest multiplizire man mit dem Abstande der ersten und zweiten Parallele, den

zweiten Rest mit dem Abstande der ersten und dritten Parallele ꝛc. Zur Summe aller dieser Produkte addire man das Produkt aus der Summe der beiden letzten Parallelen in den Abstand der letzten von der ersten Parallele; endlich halbire man alle erhaltenen Produkte, so gibt der Quotient den gesuchten Flächeninhalt, das ist:

$$\text{Polyg.} = [\,(A - C)b + (B - D)c + (C - E)d + (D - F)e + (E - G)f + (F + G)g\,] : 2.$$

Beweis:

1) Da alle gezogenen Parallelen als rechtwinklichte Ordinaten auf AG senkrecht stehen, so ist $ab = b$ die Höhe vom ersten Trapeze, oder, weil in dieser Figur $A = o$ ist, die Höhe vom Dreiecke BAB; dann $bc = c - b$ ist die Höhe vom zweiten Trapeze CBBC, ferner $cd = d - c$ die Höhe vom dritten ꝛc.;

2) Mithin ist $\triangle\, BAB = B \,.\, \frac{1}{2}b$ (§. 156.) $= (A + B)\frac{1}{2}b$, wenn man dieses Dreieck als ein Trapez betrachtet, dessen kleinere Parallele A Null ist (§. 157.);

3) Ferner Trap. $CBBC = (B + C) \times \frac{1}{2}(c - b)$, und so fortgesetzt; folglich ist

$$\text{Polyg.} = [\,(A + B)b + (B + C)(c - b) + (C + D)(d - c) + (D + E)(e - d) + (E + F)(f - e) + (F + G)(g - f)\,] : 2$$

$$= [\,Ab + Bb + Bc + Cc - Bb - Cb + Cd + Dd - Cc - Dc + De + Ee - Dd - Ed + Ef + Ff - Ee - Fe + Fg + Gg - Ff - Gf\,] : 2$$

$$= [\,Ab - Cb + Bc - Dc + Cd - Ed + De - Fe + Ef - Gf + Fg + Gg\,] : 2$$

$$= [\,(A - C)b + (B - D)c + (C - E)d + (D - F)e + (E - G)f + (F + G)g\,] : 2.$$

Beispiel:

Wenn (Fig. 114.)

$a = 0$; $A = 0$;
$b = 57$; $B = 123$;
$c = 74$; $C = 135$;
$d = 92$; $D = 120$;
$e = 125$; $E = 155$;
$f = 169$; $F = 100$;
$g = 195$; $G = 0$; so ist

$(A - C)b = - 135 \times 57$	$= +$	.....	$- 7695$
$(B - D)c = + 3 \times 74$	$= +$	222	$- ....$
$(C - E)d = - 20 \times 92$	$= +$	.....	$- 1840$
$(D - F)e = + 20 \times 125$	$= +$	2500	$- ....$
$(E - G)f = + 155 \times 169$	$= +$	26195	$- ....$
$(F - G)g = + 100 \times 195$	$= +$	19500	$- ....$
	Summa $=$	48417	$- 9535$

Folglich Polyg. $= 38882 : 2 = 19441$.

Anmerkung: 1) Hat man alle diese Linien, die mit dem nämlichen Längenmaaße gemessen werden, in Schuhen bestimmt, so beträgt der Flächeninhalt dieser Figur 19441 Quadratfuß.

2) Die arithmetischen Veränderungen, welche beim vorstehenden Beweise vorkommen, findet man im III. Theile des Lehrbuches der Arithmetik begründet, indem hier zusammengesetzte Größen mit einander multiplizirt (Arithm. III. §. 58.), gleiche entgegengesetzte Größen aufgehoben (Arithm. III. §. 45. Lehrs. I.), und die Produkte in Faktoren aufgelöſ't wurden (Arithm. III. §. 87. Nro. IV.), während die ganze Summe mit 2 dividirt wurde, anstatt alle einzelnen Summanden damit zu dividiren (Arithm. III. §. 53. Lehrs. I.).

3) Wie der Flächeninhalt einer krummlinigten Figur zu finden ist, wird in der praktischen Geometrie gezeigt werden.

§. 159.

VI. Aufgabe, ein Parallelogramm in eine beliebige Anzahl ungleicher Theile zu theilen, die ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 121.) das Parallelogramm AC in

drei Theile zu theilen, die sich zu einander verhalten, wie die Zahlen 1, dann 3, und 4;

2) Man theile eine Seite AD nach dem angegebenen Verhältnisse (§. 87.), nämlich so, daß

Am : mn = 1 : 3,
dann Am : nD = 1 : 4,
und mn : nD = 3 : 4;

3) Durch die Theilungspunkte m und n ziehe man mit der anliegenden Seite AB die Parallelen mp und nq (§. 39.); es sind die dadurch erhaltenen Parallelogramme Ap, mq und nC die drei verlangten Theile, die sich verhalten, wie 1, dann 3 und 4.

Beweis:

Diese drei Parallelogramme haben gleiche Höhen (§. 41. Zus. V.), daher verhält sich (§. 155. Zus. II.) nach Nro. 2. der Auflösung

Ap : mq = Am : mn = 1 : 3,
dann Ap : nC = Am : nD = 1 : 4,
und mq : nC = mn : nD = 3 : 4.

§. 160.

VII. Aufgabe, ein Dreieck in eine beliebige Anzahl ungleicher Theile zu theilen, die ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 122.) das Dreieck ABC in drei Theile zu theilen, die sich zu einander verhalten, wie die Zahlen 3, dann 4, und 5;

2) Man theile eine Seite AC, die man als Grundlinie annimmt, nach dem bestimmten Verhältnisse in drei Theile (§. 87.), nämlich, daß

AD : DE = 3 : 4,
dann AD : EC = 3 : 5,
und DE : EC = 4 : 5;

3) Durch die Theilungspunkte D und E ziehe man zur Spitze B die geraden Linien BD und BE, so bekömmt man die verlangten drei Theile nach dem bestimmten Verhältnisse.

Beweis:

Die drei erhaltenen Dreiecke *ABD*, *BDE* und *EBC* haben die nämliche Höhe (§. 33. Zus. IV.), daher verhält sich (§. 156. Zus. VII.)

$$\triangle ABD : \triangle BDE = AD : DE = 3 : 4,$$

dann $\triangle ABD : \triangle EBC = AD : EC = 3 : 5,$

und $\triangle DBE : \triangle EBC = DE : EC = 4 : 5.$

§. 161.

VIII. **Aufgabe**, eine jede geradlinigte Figur in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung:

1) Man suche (Fig. 123.) nach den vorhergehenden Auflösungen den Flächeninhalt der ganzen Figur, und dividire durch die gegebene Anzahl der Theile, so drückt der Quotient die Größe P eines jeden Theiles aus;

2) Nun suche man den Flächeninhalt des äußersten Dreieckes *BCD* in der Figur, und vergleiche dessen Größe mit der Fläche P, welche die Größe eines jeden Theiles angibt; es kann das Dreieck *BCD* eben so groß, oder kleiner, oder größer als der Theil P sein;

3) Ist das Dreieck $BCD = P$, so ist das Dreieck ein verlangter Theil der Figur;

4) Ist aber das Dreieck $BCD < P$, so subtrahire man den Inhalt des Dreieckes von P, und betrachte den Unterschied D, welcher $= P - \triangle BCD$, als den Flächeninhalt eines Dreieckes, das die Linie *BD* zur Grundlinie hat, und suche die entsprechende Höhe (§. 156. Zus. VIII.);

5) Auf *BD* errichte man ein Perpendikel (§. 32.), und mache es von so einer Länge $= qr$, daß es der eben gefundenen Höhe gleich ist;

6) Durch r ziehe man mit *BD* die Parallele st (§. 39.), und die gerade Linie Bt, oder Ds; so haben beide Dreiecke BDs und BDt einerlei Höhe qr (§. 41. Zus. V.), und ihr Flächeninhalt ist dem bei

Nro. 3. bestimmten Unterschiede D gleich, folglich ist $\triangle BCD + \triangle BDs = \triangle BCD + \triangle BDt = P$, und das Viereck BCDs, oder BCDt ist ein verlangter Theil;

7) Ist endlich $\triangle BCD > P$, so subtrahire man P vom $\triangle BCD$, und bestimme, wie vorhin, bei Nro. 4, 5 und 6. das Dreieck BmD und BnD; es sind diese beiden Dreiecke einander gleich (§. 143. Zus. I.), jedes ist so groß, wie der gefundene Unterschied, welcher $= \triangle BCD - P$, und $\triangle mCD = \triangle BCn = P$;

8) Auf eine ähnliche Art lassen sich die übrigen Theile bestimmen.

§. 162.

IX. **Aufgabe**, eine geradlinigte Figur in eine gegebene Anzahl ungleicher Theile nach einem bestimmten Verhältnisse zu theilen.

Auflösung:

1) Man suche den ganzen Flächeninhalt der Figur, und berechne die Größe der einzelnen Theile nach dem bestimmten Verhältnisse (Arithm. IV. §. 40.);

2) Die gefundenen einzelnen Theile konstruire man nach der Vorschrift des §. 161.

§. 163.

II. Lehrsatz:

Aehnliche Dreiecke sind mit den Quadraten homologer Seiten oder Höhen gerade proportionirt.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 82.) die ähnlichen Dreiecke ABC und abc gegeben, und BD und bd seien homologe Höhen, das ist, solche, welche von gleichen Winkeln aus gezogen sind;

2) Die Dreiecke stehen mit ihren Grundlinien und Höhen im zusammengesetzten geraden Verhältnisse (§. 156. Zus. VII.), daher verhält sich

$$\triangle ABC : \triangle abc = AC \times BD : ac \times bd;$$

3) Nach §. 99. verhält sich

$$AC : ac = BD : bd,$$

also $AC^2 : ac^2 = BD^2 : bd^2$ (Arithm. IV. §. 42.);

4) Ferner verhält sich

$$AC : ac = AC : ac,$$

dann $AC : ac = BD : bd$, also (Arithm. IV. §. 44.)

$$AC^2 : ac^2 = AC \times BD : ac \times bd;$$

folglich auch nach Nro. 2.

$$\triangle ABC : \triangle abc = AC^2 : ac^2;$$

5) Endlich verhält sich nach Nro. 3. und vermöge des IV. Theiles der Arithmetik §. 42.

$$AC^2 : ac^2 = BD^2 : bd^2;$$

mithin auch $\triangle ABC : \triangle abc := BD^2 : bd^2$.

§. 164.

III. Lehrsatz:

Aehnliche geradlinigte Figuren sind mit den Quadraten homologer Seiten oder homologer Diagonalen gerade proportionirt.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 78.) die beiden ähnlichen Siebenecke gegeben, und man theile sie von einem Ecke *A* aus durch homologe Diagonalen in Dreiecke, die der Ordnung nach einander ähnlich sind (§. 100.);

2) Daher verhält sich

$$\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2 \text{ (§. 161.)},$$
$$\triangle ACD : \triangle acd = AC^2 : ac^2 = AD^2 : ad^2,$$
$$\triangle ADE : \triangle ade = AD^2 : ad^2 = AE^2 : ae^2,$$
$$\triangle AEF : \triangle aef = AE^2 : ae^2 = AF^2 : af^2,$$
$$\triangle AFG : \triangle afg = AF^2 : af^2 = AB^2 : ab^2,$$

also verhalten sich die Dreiecke (Arithm. IV. §. 39. Zus. II.)

$$ABC + ACD + ADE + AEF + AFG$$
$$: abc + acd + ade + aef + afg$$
$$= \triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2,$$

indem alle vorstehenden Verhältnisse einander gleich sind;

3) Folglich verhalten sich diese ähnlichen Figuren wie die Quadrate homologer Diagonalen, das ist,

$$ABCDEFG : abcdefg = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2.$$

§. 165.

IV. Lehrsatz:

Zwei Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Diameter oder Halbmesser.

Beweis:

1) Man drücke die beiden Kreisflächen durch C und c, ihre Durchmesser durch D und d, und ihre Halbmesser durch R und r aus;

2) Nach §. 156. Zus. II. ist die Kreisfläche C $= \frac{1}{4}D^2\pi = R^2\pi$, und $c = \frac{1}{4}d^2\pi = r^2\pi$, und daher verhält sich (Arithm. II. §. 50. d.)

$$C : c = \frac{1}{4}D^2\pi : \frac{1}{4}d^2\pi = R^2\pi : r^2\pi = D^2 : d^2 = R^2 : r^2$$

(Arithm. IV. §. 41.).

§. 166.

Den im §. 148. aufgestellten pythagorischen Lehrsatz betreffend.

Aus dem Lehrsatze, daß sich ähnliche Figuren wie die Quadrate homologer Seiten verhalten (§. 164.), läßt sich auf nachstehende Weise ein neuer Beweis für den im §. 148. aufgestellten Lehrsatz anführen:

1) Errichtet man (Fig. 116.) über die drei Seiten des rechtwinklichten Dreieckes *ABC* Quadrate, und drückt man sie durch AC^q, AB^q, und BC^q aus, so sind diese regulären Vierecke einander ähnlich (§. 90. Zus. IV.), mithin verhält sich nach §. 164.

$$AB^q : BC^q = AB^2 : BC^2, \text{ und daher}$$

$AB^q + BC^q : AB^q = AB^2 + BC^2 : AB^2$ (Arithm. IV. §. 39. Zus. I.), eben so ist

$$AB^q : AC^q = AB^2 : AC^2, \text{ also}$$

$AB^q + BC^q : AC^q = AB^2 + BC^2 : AC^2$ (Arithm. IV. §. 43. Nro. 2.

2) Nun ist $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (§. 97.), also auch $AB^q + BC^q = AC^q$ (Arithm. IV. §. 35. Zus. II.), oder $AC^q = AB^q + BC^q$.

§. 167.

Beispiele zur Uebung in der Bestimmung des Flächeninhaltes der Figuren.

Man bestimme den Flächeninhalt folgender Figuren:

a) Eines Rechteckes, oder überhaupt eines Parallelogrammes, dessen Grundlinie 450,8, und dessen Höhe 36,6 Schuh beträgt;

b) Eines Quadrates, dessen Seite 436 Fuß hält;

c) Eines Dreieckes, dessen Grundlinie 650, und dessen Höhe 30 Schuh hält;

d) Eines Kreises, dessen Durchmesser 86,9 Schuh hält;

e) Eines Trapezes, bei dem die eine Parallele 136,4, die andere 94,6, und die Höhe 18,5 Schuh beträgt;

f) Endlich eines Viereckes, bei dem die gemeinschaftliche Grundlinie der beiden Dreiecke 76 Schuh, und die Höhe des einen Dreieckes 36,8, und die des andern 24,5 Fuß beträgt.

Auflösung:

a) Nach dem §. 153. Zus. IV. u. §. 155. ist das Rechteck und das Parallelogramm $= B.A$, daher $= 450{,}8 \times 36{,}6 = 16499{,}28$ Quadratfuß (Arithm. III. §. 14.), das ist, der Flächeninhalt eines solchen Rechteckes oder Parallelogrammes beträgt im Dezimalmaaße 164 □ Ruthen, 99 □ Fuß und 28 □ Zoll (Arithm. I. §. 80.).

b) Nach §. 153. Zus. V. ist das Quadrat $= C^2$, daher $= 436^2 = 436 \times 436 = 190096$ □ Fuß $= 4$ Tagwerk, 300 □ Ruthen und 96 □ Schuh (Arithm. I. §. 80.).

c) Nach §. 156. ist $\triangle = \frac{B.A}{2}$, also $= \frac{650 \times 30}{2}$ $= 325 \times 30 = 9750$ □ Fuß $= 97$ □ Ruthen und 50 □ Fuß.

d) Nach §. 156. Zus. II. ist die Kreisfläche $C = \frac{1}{4}\pi d^2$, also $= 0{,}7854 \times 86{,}9^2 = 0{,}7854 \times 7551{,}61$

$= 5931{,}03 \ldots\ \square$ Fuß, mithin beinahe $= 59\ \square$ Ruthen, 31 $\square$ Fuß, und 3 $\square$ Zoll.

e) Nach §. 157. ist das Trapez $= (B + b) \times \frac{1}{2}A$ $= (136{,}4 + 94{,}6) \times \frac{18{,}5}{2} = 2136{,}75\ \square$ Fuß $= 21\ \square$ Ruthen, 36 $\square$ Fuß und 75 $\square$ Zoll.

f) Endlich ist nach §. 158. das Viereck $= \left(\frac{B\,.\,A}{2} + \frac{B\,.\,a}{2}\right) = \frac{1}{2}B(A + a)$, also $= \frac{76}{2}(36{,}8 + 24{,}5)$ $= 38 \times 61{,}3 = 2329{,}4\ \square$ Fuß $= 23\ \square$ Ruthen, 29 $\square$ Fuß und 40 $\square$ Zoll.

Anmerkung: 1) In Absicht auf geradlinigte Figuren, im Falle sie durch Perpendikel nach einer angenommenen Basis in Trapezen getheilt werden, ist im §. 158. bei der III. Auflösung schon ein Beispiel angeführt worden.

2) In dem bei d. angeführten Beispiele kann die Kreisfläche, welche $= \frac{1}{4}\pi d^2$ ist, mittels der Logarithmen auf folgende Weise gefunden werden:

Log. d = Log. 86,9 = 1,9390198
$\times 2$

also Log. d^2 = 3,8780396 (Arithm. IV. §. 58.),
ferner Log. $\frac{1}{4}\pi$ = 0,8950899 -- 1 (§. 132. Zus. I. c.),

mithin Log. C = 3,7731295 (Arithm. IV. §. 56.) = Log. 5931,021, weßhalb die Kreisfläche beinahe = 5931,021 $\square$ Fuß = 59 $\square$ Ruthen, 31 $\square$ Fuß, 2 $\square$ Zoll und 10 $\square$ Linien.

III. Hauptstück.

Von der Lage gerader Linien gegen Ebenen, und verschiedener Ebenen gegen einander.

---

§. 168.

Grundsätze.

a) Eine gerade Linie, die einen Punkt über, und einen Punkt unter einer Ebene hat, durchschneidet dieselbe wenigstens in einem Punkte.

b) Durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, ist die Lage einer Ebene bestimmt.

c) Zwei Ebenen, welche zusammen stoßen, haben verlängert mehrere Punkte gemein.

I. Zusatz: Eine gerade Linie kann eine Ebene nur in einem Punkte schneiden; denn hätte die gerade Linie mit der Ebene zwei Punkte gemein, so würde sie ganz in dieser Ebene liegen (§. 4. Zus.).

II. Zusatz: Wenn zwei Ebenen zusammen stoßen, so durchschneiden sie einander in einer geraden Linie. Denn (Fig. 124.) man nehme in den beiden zusammenstoßenden Ebenen LM und BC zwei Punkte A und B an, welche beiden Ebenen gemein sind (Grundsatz c.), und ziehe die gerade Linie AB, so liegt diese in beiden Ebenen (§. 4. Zus.), und ist deßhalb die Durchschnittslinie der Ebene LM und BC, das ist, in dieser geraden Linie schneiden sich die beiden Ebenen.

§. 169.

Senkrechte, schiefe, und parallele Linien in Beziehung auf Ebenen.

a) Eine gerade Linie steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie mit allen Linien, die in der Ebene durch ihren Durchschnittspunkt möglich sind,

rechte Winkel bildet; daher ist (Fig. 125.) die Linie AB auf der Ebene LM senkrecht, wenn AB auf alle Linien, die in der Ebene durch den Durchschnittspunkt B möglich sind, somit auf CD, GH, EF ꝛc. senkrecht steht.

b) Eine gerade Linie steht auf einer Ebene schief, wenn sie nicht darauf senkrecht steht; deßhalb steht (Fig. 124.) die Linie EF auf der Ebene LM schief.

c) Gerade Linien, die wie immer verlängert eine Ebene nie durchschneiden, sind zu ihr parallel; wie (Fig. 134.) die Linien AC und AD.

I. Zusatz: Wenn zwei Ebenen sich schneiden, so kann eine gerade Linie, welche durch einen Punkt ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie geht, nicht auf beiden Ebenen zugleich senkrecht stehen.

Denn man ziehe (Fig. 124.) in der Ebene LM durch den Berührungspunkt F der Linien GF die eine gerade Linie FH, welche mit AB einen beliebigen Winkel bildet, und lege durch die drei Punkte G, F und H die Ebene GFH (§. 166. Grunds. b.), so stoßt diese mit der Ebene BC in F zusammen, und schneidet sie also in einer geraden Linie FE (§. 168. Zus. II.); stände nun GF auf beiden Ebenen LM und BC zugleich senkrecht, so müßte jeder der Winkel GFE und GFH ein rechter Winkel sein, und es gäbe in der Ebene GFH durch den Punkt F auf FG zwei Perpendikel FE und FH, was nicht möglich ist (§. 32. Zus. II.), daher kann die gerade Linie FG am gemeinschaftlichen Punkte F nicht zugleich auf die beiden sich schneidenden Ebenen LM und BC senkrecht stehen.

II. Zusatz: Eben so kann eine gerade Linie, die nicht durch einen gemeinschaftlichen Punkt der beiden sich schneidenden Ebenen geht, nicht zugleich auf beiden Ebenen senkrecht stehen.

Denn man ziehe (Fig. 124.) vom Berührungspunkte Q der Linie EQ zu einem beliebigen Punkte F

der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie AB die gerade Linie QF in der Ebene LM, und nach dem nämlichen Punkte F in der Ebene BC vom Punkte E der Linie EQ die gerade Linie EF, so erhält man das Dreieck EFQ; steht nun EQ auf der Ebene LM senkrecht, so ist der Winkel EQF ein rechter Winkel, mithin ist der Winkel FEQ spitzig (§. 29 Zus.), und die Linie QE steht auf der Ebene BC schief, das ist, die gerade Linie EQ kann auch in diesem Falle auf die beiden sich schneidenden Ebenen nicht zugleich senkrecht stehen.

III. Zusatz: Da also eine gerade Linie, sie mag durch einen Punkt der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie gehen, oder nicht, auf den beiden Ebenen, die sich schneiden, nicht zugleich senkrecht stehen kann, so kann überhaupt eine gerade Linie nicht auf zwei sich schneidenden Ebenen zugleich senkrecht stehen.

IV. Zusatz: Eine gerade Linie kann durch einen Punkt nicht zugleich auf zwei Ebenen senkrecht sein; denn da dieser Punkt beiden Ebenen gemeinschaftlich ist, so stoßen die Ebenen zusammen, und durchschneiden verlängert einander (§. 168. Zus. II.), folglich kann auf ihnen die gerade Linie nicht zugleich senkrecht stehen (Zus. III.).

§. 170.

I. Lehrsatz:

Wenn eine gerade Linie auf zwei gerade Linien in einer Ebene an ihrem Durchschnittspunkte perpendikulär steht, so ist sie auf der Ebene selbst senkrecht.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 125.) in der Ebene LM die beiden Linien BC und BE gegeben, die zusammen keinen geraden Winkel bilden (§. 7. Zus. I.), und auf welche im Durchschnittspunkte B die gerade Linie AB senkrecht steht;

2) Man verlängere gegen B hin die Linien BC und BE, und mache BF = BE, und BD = BC;

3) Durch den Berührungspunkt B ziehe man eine beliebige gerade Linie in der Ebene LM, etwa GH zwischen den Schenkeln BE und BC, so wird diese durch die geraden Linien EC und DF geschnitten, welche von E zu C, und von D zu F gezogen werden;

4) Vom Punkte A ziehe man zu den Punkten C, G und E, und zu F, H und D die geraden Linien AC, AE, AF, AH, und AD; es entstehen dadurch mehrere kongruente Dreiecke; nämlich:

5) Das Dreieck CBE ≌ △ FBD (§. 20.), weil BE = BF, dann BC = BD (Nro. 2.), und der Scheitelwinkel CBE = FBD (§. 10. Zus. III.);

6) Das Dreieck BGE ≌ △ BFH (§. 22.), weil nach Nro. 5. der Winkel CEB oder GEB = BFH (§. 18. Zus. IV.), dann GBE = FBH (§. 10. Zus. III.), und BE = BF (Nro. 2.);

7) Das Dreieck ABE ≌ △ ABF (§. 20.), weil BE = BF, dann AB = AB, und ABE = ABF = 90 Grad (Nro. 1.);

8) Das Dreieck ABC ≌ △ ABD, weil BC = BD (Nro. 2.), dann AB = AB, und *ABC* = *ABD* = 90 Grad (Nro. 1.);

9) Das Dreieck *ACE* ≌ △ *AFD* (§. 24.), weil CE = FD (Nro. 5.), dann *AC* = *AD* (Nro. 8.), und AE = AF (Nro. 7.);

10) Das Dreieck AGE ≌ △ AHF (§. 20.), weil AE = AF (Nro. 7.), dann GE = HF (Nro. 6.), und Winkel AEG = AFH (Nro. 9.);

11) Endlich ist △ *ABG* ≌ △ *ABH* (§. 24.), weil AB = AB, dann BG = BH (Nro. 6.), und AG = AH (Nro. 10.);

12) In den kongruenten Dreiecken ABG und ABH sind die Winkel ABG und ABH einander gleich (§. 18. Zus. IV.), und sie sind Nebenwinkel (§. 8. a.),

daher ist jeder davon ein rechter Winkel, und AB steht auf GH senkrecht (§. 8. c. u. d.).

Nun ist aber die Linie GH durch den Punkt B beliebig in der Ebene LM gezogen, was von ihr erwiesen ist, gilt von allen übrigen Linien, die in dieser Ebene durch den Punkt B möglich sind, es steht also die gerade Linie AB auf jeder Linie, die man durch B in der Ebene LM ziehen kann, senkrecht, folglich auf der Ebene selbst (§. 169. a.), wenn AB auf die zwei Linien BE und BC, oder auf EF und CD senkrecht steht.

§. 171.

II. Lehrsatz:

Drei gerade Linien, die in einem Punkte zusammen stoßen, durch welchen eine vierte gerade Linie auf ihnen senkrecht steht, liegen in der nämlichen Ebene.

Beweis:

1) Man setze (Fig. 126.), es stoßen die Linien BC, BE und BD im Punkte B zusammen, und durch diesen Punkt sei auf sie die Linie AB senkrecht;

2) Durch die Punkte C, B und E (§. 168. b.), oder durch die beiden Linien BC und BE lege man die Ebene LM, so muß BD in dieser Ebene liegen;

3) Wäre BD nicht in dieser Ebene, sondern z. B. über derselben, so lege man durch A, B und D die Ebene BG, so wird diese die Ebene LM in einer geraden Linie BF schneiden (§. 168. Zus. II.);

4) Nach der Voraussetzung ist der Winkel ABD = R, und ABF = R, weil AB auf BC und BE, mithin auf der Ebene LM senkrecht steht (§. 170.), und jetzt wäre in der nämlichen Ebene BG am Punkte B auf AB die Linie BD und BF senkrecht (§. 9. Zus. IV.), was nicht möglich ist (§. 32. Zus. II.), daher müssen die drei Linien BC, BE und BD, auf welche AB im Punkte B senkrecht steht, in der nämlichen Ebene liegen.

§. 172.

III. Lehrsatz:

A) Wenn zwei gerade Linien auf der nämlichen Ebene senkrecht stehen, so sind sie parallel; und wenn

B) von zwei Parallellinien die eine auf einer Ebene senkrecht steht, so steht die andere auch darauf senkrecht.

Beweis von A:

1) Es seien (Fig. 127.) die beiden Linien AB und CD auf die Ebene LM senkrecht;

2) Man verbinde die beiden Punkte B und C, in welchen die Perpendikel mit der Ebene LM zusammen stoßen, durch die gerade Linie BC, welche ganz in dieser Ebene liegen wird (§. 4. Zus.);

3) Am Punkte C errichte man in der Ebene LM auf CB das Perpendikel CE (§. 45.), mache es gleich BA, so daß CE = BA, und ziehe die gerade Linie AE;

4) Es ist nach der Voraussetzung der Winkel ABC = 90 Grad (§. 169. a.), und BCE = 90° (ex construct.), mithin ABC = BCE, ferner ist BC = BC, und nach Nro. 3. ist AB = CE, also ist △ ABC ≌ △ BCE (§. 20.), ferner ist AB = CE, dann BE = AC, und AE = AE, also △ ABE ≌ △ ACE (§. 24.), und der Winkel ABE = ACE, somit ACE = 90°, weil auch ABC = 90 Grad (§. 169. a.);

5) Deßwegen steht die Linie EC senkrecht auf CB, CA und CD, da nach Nro. 1. die Linie DC auch auf der Ebene senkrecht steht;

6) Die drei Linien CB, CA und CD liegen in der nämlichen Ebene (§. 171.), in welcher AB liegt (§. 4. Zus.); das ist, AB und CD liegen in der nämlichen Ebene;

7) Endlich ist ABC = R = DCB (§. 169. a.), weßhalb AB mit DC parallel ist (§. 38. Zus. I.).

Es sind also zwei gerade Linien parallel, wenn sie auf der nämlichen Ebene senkrecht stehen.

Beweis von B:

1) Man konstruire die Figur wie vorhin beim Beweise von A bei Nro. 2. u. 3., es ist nach Nro. 4. wieder das Dreieck ABC ≌ △ BCE, dann △ ABE ≌ △ ACE, und ABC = BCE = R, wie auch ABE = ACE = R, weßhalb EC auf CB und CA, also auf die Ebene ABC senkrecht steht (§. 170.);

2) Die Linie CD ist als Parallele zu BA in der nämlichen Ebene, in welcher AB liegt (§. 37. b.); wird nun die Ebene ABC vergrößert, so fällt CD ganz in diese Ebene, und EC steht auch auf CD senkrecht (§. 169. a.);

3) Bei den Parallelen AB und DC sind die Winkel ABC + BCD = 2R (§. 41.), und BCD = R, weil nach der Annahme ABC = R (§. 9. Zus. IV.);

4) Die Linie DC steht jetzt auf CB und CE, also auf die ganze Ebene LM senkrecht (§. 170.).

Wenn demnach von zwei Parallelen die eine auf einer Ebene senkrecht steht, so steht die andere auch darauf senkrecht.

Zusatz: Wenn zwei gerade Linien mit einer dritten parallel sind, so sind sie es auch unter sich, wenn schon nicht alle drei Linien in der nämlichen Ebene liegen.

Es sei (Fig. 128.) die Linie AB ‡ CD, und CD ‡ EF, und man ziehe vom Punkte H der Linie CD in der Ebene, in welcher CD und AB liegt, auf CD das Perpendikel HG, und vom nämlichen Punkte H in der Ebene, in welcher CD und EF liegt, auf CD das Perpendikel HM (§. 32.), und denke sich durch die Punkte G, H und M die Ebene GHM gelegt; es ist DH oder CD senkrecht auf HG und HM, also auf die Ebene GHM (§. 170.), ferner ist nach der Voraussetzung CD ‡ AB, und CD ‡ EF, also stehen auch AB und EF auf der Ebene GHM senkrecht (Lehrs. B.), und AB ist auch mit EF parallel (Lehrs. A.).

§. 173.

I. Aufgabe, von einem Punkte außer der Ebene auf sie ein Perpendikel zu ziehen.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 129.) vom Punkte A außer der Ebene LM auf diese Ebene eine senkrechte Linie zu ziehen;

2) Man ziehe in der Ebene LM die beliebige gerade Linie DE, dann vom Punkte A auf DE das Perpendikel AC (§. 33.), ferner am Punkte C in der Ebene LM auf DE das Perpendikel CH (§. 32.), und endlich von A auf CH das Perpendikel AB, so ist dieses die verlangte Linie, welche auf LM senkrecht steht.

Beweis:

1) Man ziehe in der Ebene LM durch B zu DE die Parallele FG (§. 39.);

2) Die Linie DE steht senkrecht auf AC und CH (ex constr.), weßhalb DE auf die Ebene ACB senkrecht steht (§. 170.), gleichwie auch die Parallele FG darauf senkrecht ist (§. 172. B.);

3) Es ist also ABG = R (§. 169 a.), und ABC = R (ex constr.), und die Linie AB steht auf der Ebene LM senkrecht (§. 170.).

I. Zusatz: Vom Punkte A ist (Fig. 129.) nur das einzige Perpendikel AB auf die Ebene LM möglich; denn zieht man eine andere Linie AC auf die Ebene LM, und zu den Durchschnittspunkten C und B die gerade Linie CB, so ist im rechtwinklichten Dreiecke ABC wegen des rechten Winkels bei B der Winkel ACB spitzig (§. 29. Zus.), und die Linie AC steht auf der Ebene LM schief (§. 169. b.).

II. Zusatz: Vom Punkte A ist die senkrechte Linie AB die kürzeste Linie unter allen Linien, die von A zur Ebene LM möglich sind, und mißt deßwegen die Entfernung des Punktes A von der Ebene

LM; denn jede andere Linie AC wird Hypotenuse im rechtwinklichten Dreiecke, und ist deßhalb größer, als AB (§. 30. Zus. IV.).

III. Zusatz: Wenn *AB* auf der Ebene LM, und *AC* auf die in dieser Ebene gezogene Linie *DE* senkrecht steht, so steht auch die gerade Linie *BC* auf DE senkrecht.

Denn sonst könnte man durch *C* in der Ebene LM auf *DE* das Perpendikel Cn, und auf Cn das Perpendikel *A*n ziehen, und *A*n wäre auch auf die Ebene LM senkrecht (Aufg.), und es gäbe von *A* auf LM zwei Perpendikel *AB* und *A*n, was nicht möglich ist (Zus. I.).

IV. Zusatz: Wenn *AB* auf der Ebene LM senkrecht steht, und *CB* in dieser Ebene auf *DE* senkrecht ist, so ist auch *AC* auf *DE* perpendikulär.

Denn sonst könnte man auf *DE* das Perpendikel *A*p, dann von p in der Ebene LM auf *DE* das Perpendikel pq, und auf pq von *A* das Perpendikel *A*q ziehen, welches ebenfalls auf die Ebene LM senkrecht wäre (Aufg.), was unmöglich ist (Zus. I.).

§. 174.

II. Aufgabe, durch einen in einer Ebene gegebenen Punkt auf sie eine senkrechte Linie zu ziehen.

Auflösung:

1) Man nehme (Fig. 129.) außer der Ebene LM einen beliebigen Punkt *A* an, und ziehe von diesem nach §. 173. auf die Ebene LM die senkrechte Linie *AB*;

2) Ist durch den gegebenen Punkt R auf die Ebene das Perpendikel zu errichten, so ziehe man durch R mit *BA* die Parallele RS (§. 39.), so ist RS durch den in der Ebene LM gegebenen Punkt R auf die Ebene das verlangte Perpendikel.

Zusatz: Durch einen in einer Ebene gegebenen

Punkt gibt es auf die Ebene nur eine einzige senkrechte Linie.

Denn (Fig. 129.) wäre nebst RS durch den Punkt R auch RT auf die Ebene LM senkrecht, und man würde durch die drei Punkte S, R und T eine Ebene legen, so würde sie die Ebene LM, weil sie damit im Punkte R zusammen stoßt (§. 168. c.), in einer geraden Linie RU schneiden (§. 168. Zus. II.), und auf RU wäre in der nämlichen Ebene RSTU vom Punkte R aus sowohl die Linie RS, als auch RT senkrecht (§. 169. a.); dieses ist aber nicht möglich (§. 32. Zus. II.), daher gibt es durch einen in einer Ebene gegebenen Punkt auf die Ebene nur ein einziges Perpendikel.

§. 175.

Neigungswinkel.

a) Durchschneidet eine gerade Linie eine Ebene schief, oder steht sie darauf schief, und man zieht von einem beliebigen Punkte der Linie auf die Ebene ein Perpendikel, und verbindet in der Ebene die beiden Berührungspunkte durch eine gerade Linie, so heißt der dadurch entstehende geradlinigte Winkel der Neigungswinkel der schiefen Linie gegen die Ebene.

Daher ist (Fig. 129.) der Winkel *ACH* der Neigungswinkel der Linie *AC* zur Ebene LM, wenn *AC* auf der Ebene LM schief steht, dann von *A* das Perpendikel *AB* auf die Ebene, und darin durch *C* und *B* die gerade Linie *CH* gezogen wird.

b) Wenn man vom gemeinschaftlichen Punkte der Durchschnittslinie zweier Ebenen in beiden Ebenen auf diese Linie Perpendikel zieht, so heißt der dadurch erhaltene Winkel der Neigungswinkel der beiden Ebenen zu einander.

Deßwegen ist (Fig. 124.) der Winkel EFH der beiden Linien EF und FH, von welchen die eine EF in der Ebene *CB*, und die andere FH in der Ebene LM am gemeinschaftlichen Punkte F der Durchschnitts-

linie *AB* auf diese senkrecht steht, der Neigungswinkel der beiden Ebenen LM und *BC*.

Zusatz: Steht (Fig. 127.) eine gerade Linie *AB* auf einer Ebene LM senkrecht, und man zieht vom Punkte A auf LM eine senkrechte Linie, so fällt diese mit *AB* in eine Linie zusammen (§. 173. Zus. 1.); zieht man nun in der Ebene LM vom Punkte *B* eine beliebige gerade Linie *BC*, so ist *ABC* der Neigungswinkel des Perpendikels *AB* zur Ebene LM, und immerhin ein rechter Winkel, oder = 90 Grad (§. 169. a.).

§. 176.

IV. Lehrsatz:

Wenn die Schenkel des einen Winkels mit den Schenkeln des andern parallel sind, und die beiden Winkel nicht in der nämlichen Ebene liegen, so sind die Winkel ebenfalls einander gleich.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 130.) der Schenkel *AB* # *ED*, und *BC* # *EF*, und, wenn man durch die Scheitel die gerade Linie *BE* zieht, sowohl die Winkel *ABE* und *DEB*, als auch *EBC* und *BEF* innere Winkel (§. 37. d. a.);

2) Man mache *AB* = *ED*, und *BC* = *EF*, und ziehe die geraden Linien *AD* und *CF*, wie auch *AC* und *DF*;

3) Die Linie *AB* $\underline{\underline{\#}}$ *DE* (ex constr.), also auch *AD* $\underline{\underline{\#}}$ *BE* (§. 48. Zus. VIII.), ferner ist aus den nämlichen Gründen *BC* $\underline{\underline{\#}}$ *EF*, also auch *BE* $\underline{\underline{\#}}$ *CF*, folglich ist *AD* $\underline{\underline{\#}}$ *CF* (§. 172. Zus. und Arithm. 1. §. 10. Nro. 4.), und deßwegen auch *AC* = *DF*;

4) Jetzt ist AC = DF, dann AB = DE, und BC = EF, mithin △ ABC ≅ △ DEF (§. 24.), und der Winkel ABC = DEF (§. 18. Zus. IV.).

I. Zusatz: Zwei Parallelen, die auf einer Ebene aufstehen, bilden mit dieser gleiche Neigungswinkel.

Stehen (Fig. 131.) die Linien AB und CD auf der Ebene LM schief, und ist die Linie AB # CD, zieht man ferner von beliebigen Punkten A und C dieser Linien auf die Ebene LM die Perpendikel AE und CF (§. 173.), so ist AE # CF (§. 172. A.), und AB # CD (ex constr.), also der Winkel BAE = DCF (Lehrs.), überdieß ist AEB = DCF = R (§. 169. a.), mithin ist auch ABE = CDF (§. 43. Zus. II.), d. h., die zwei Parallelen AB und CD machen mit der Ebene LM gleiche Neigungswinkel.

II. Zusatz: Wenn sich zwei Ebenen schneiden, und man zieht durch einen beliebigen Punkt ihrer Durchschnittslinie in beiden Ebenen auf diese Linie Perpendikel, so ist der Winkel, den die Perpendikel bilden, immer gleich groß, man mag den Punkt annehmen, wo man will.

Zieht man (Fig. 124.) vom beliebigen Punkte F der Durchschnittslinie AB der beiden Ebenen LM und BC in der einen Ebene LM das Perpendikel FH, und in der andern Ebene BC auf die Linie AB das Perpendikel FE, und zieht man auf die nämliche Weise durch einen andern beliebigen Punkt B der Durchschnittslinie die Perpendikel BN, und BD, so ist FH # BN, und FE # BD (§. 38. Zus. I.), und deßhalb (Lehrs.) der Winkel EFH = DBN.

III. Zusatz: Durch den Winkel, den man auf diese Weise erhält, ist die Neigung zweier Ebenen gegen einander vollkommen bestimmt.

Denn wenn (Fig. 124.) die Linie FH in der Ebene LM auf AB, und die Linie FE in der Ebene BC ebenfalls am Punkte F auf AB senkrecht steht, so bestimmen die drei Punkte A, B und H die Lage der Ebene LM, und die drei Punkte A, B und E die

Lage der Ebene BC (§. 168. b.), weßhalb der Winkel EFH die Neigung der beiden Ebenen LM und BC gegen einander bestimmt, und der Neigungswinkel der beiden Ebenen genannt wird.

IV. Zusatz: Wenn der Neigungswinkel ein rechter Winkel ist, so steht die eine Ebene auf der andern senkrecht.

Ist (Fig. 132.) der Neigungswinkel *ABF* ein rechter Winkel, und man verlängert in der Ebene LM die gerade Linie FB gegen B hin, so sind die Winkel *ABF* und *ABE* Nebenwinkel (§. 8. a.), und *ABE* ist ebenfalls ein rechter Winkel (§. 9. Zus. III.); deßwegen neigt sich die Ebene DC auf keine Seite, und steht auf der Ebene LM senkrecht.

Anmerkung: Die beiden Zusätze II. und III. gelten auch für den Fall, wenn (Fig. 124.) die in den beiden Ebenen LM und BC durch F gezogenen geraden Linien FH und FE auf der Durchschnittslinie schief stehen, und ein solcher Winkel bestimmt ebenfalls die Neigung der beiden Ebenen zu einander; indeß wählt man aber zur Bestimmung der Neigung lieber jenen Winkel, dessen Schenkel senkrecht stehen, weil sich der rechte Winkel leichter und bestimmter konstruiren läßt.

§. 177.

V. Lehrsatz:

Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht steht, so ist jede Ebene, welche durch diese Linie gelegt wird, auf jener Ebene senkrecht.

Beweis:

1) Es stehe (Fig. 132.) die gerade Linie AB auf der Ebene LM senkrecht, und durch AB sei die Ebene DC gelegt;

2) Durch B errichte man in der Ebene LM auf die Durchschnittslinie DG das Perpendikel BF (§. 32.), es ist, weil nach der Voraussetzung AB in der Ebene DC auf die Ebene LM, also auch auf DG senkrecht steht (§. 169. a.), der Winkel *ABF* der Neigungs-

winkel der Ebenen DC und LM (§. 176. Zus. III.), und ein rechter Winkel (§. 169. a.), weßhalb die Ebene DC auf der Ebene LM senkrecht steht (§. 176. Zus. IV.).

I. Zusatz: Wenn man von einem beliebigen Punkte der einen Ebene, welche auf der andern senkrecht steht, auf die Durchschnittslinie ein Perpendikel zieht, so steht dieses auf der andern Ebene senkrecht.

Steht (Fig. 132.) die Ebene DC auf LM senkrecht, und man zieht vom Punkte A der Ebene DC auf die Durchschnittslinie DG das Perpendikel AB, und in der Ebene LM auf die Durchschnittslinie DG durch B das Perpendikel BF, so ist *ABF* der Neigungswinkel (§. 176. Zus. III.), und ein rechter Winkel (§. 176. Zus. IV.), gleichwie der Winkel *ABD* ein rechter Winkel ist (per hyp.); es steht also AB auf DG und BF senkrecht, mithin auf die Ebene LM selbst (§. 170.).

II. Zusatz: Wenn eine Ebene auf der andern senkrecht steht, und man zieht von einem beliebigen Punkte der ersten Ebene auf die andere ein Perpendikel, so liegt dieses ganz in der ersten Ebene, und steht auf der Durchschnittslinie senkrecht.

Ist (Fig. 132.) die Ebene DC auf LM senkrecht, und man zieht vom Punkte A der Ebene DC auf die Ebene LM das Perpendikel AB (§. 173.), so könnte man, wenn AB nicht in der Ebene DC zugleich auf DG senkrecht wäre, von A in der Ebene DC auf DG das Perpendikel AO ziehen, welches auf die Ebene LM senkrecht ist (Zus. I.), und es gäbe von A auf die Ebene zwei Perpendikel AB und AO, was nicht möglich ist (§. 173. Zus. I.), daher liegt das von A auf LM gezogene Perpendikel in der Ebene DC, und steht auf DG senkrecht.

III. Zusatz: Steht eine Ebene auf einer andern senkrecht, und man zieht von einem Punkte der Durchschnittslinie auf sie in der ersten Ebene ein Perpendikel, so steht dieses auch auf der andern Ebene senkrecht.

Wenn (Fig. 132.) die Ebene DC auf der Ebene LM senkrecht steht, und man zieht vom Punkte B auf die Durchschnittslinie DG das Perpendikel BA, und in der Ebene LM von B das Perpendikel BF, so ist *ABF* der Neigungswinkel der beiden Ebenen (§. 176. Zus. III.), und ein rechter Winkel (§. 176. Zus. IV.), weßhalb BA auf DG und BF, also auf der Ebene LM senkrecht steht (§. 170.).

IV. Zusatz: Wenn eine Ebene auf einer andern senkrecht steht, und man zieht von einem Punkte der Durchschnittslinie auf die andere Ebene ein Perpendikel, so liegt dieses ganz in der ersten Ebene, und steht auch auf der Durchschnittslinie senkrecht.

Wenn (Fig. 132.) die Ebene DC auf der Ebene LM senkrecht steht, und man zieht vom Punkte B auf die Ebene LM das Perpendikel BA, und zugleich in der Ebene DC von B auf DG das Perpendikel BH, so müssen die zwei Linien BA und BH in eine Linie zusammen fallen; weil sonst auch BH auf der Ebene LM senkrecht wäre (Zus. III.), und es durch den Punkt B auf die Ebene LM zwei Perpendikel gäbe, was nicht möglich ist (§. 174. Zus.), daher liegt das Perpendikel BA ganz in der Ebene DC, und steht auf der Durchschnittslinie DG senkrecht.

V. Zusatz: Die Durchschnittslinie zweier Ebenen steht auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht. Denn (Fig. 124.) der Winkel BFH ist = R, und BFE ist ebenfalls = R (§. 176. Zus. III.), daher steht die Durchschnittslinie BA auf der Ebene GFH des Neigungswinkels senkrecht (§. 170.).

VI. Zusatz: Wenn die Durchschnittslinie zweier Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht steht, so sind beide Ebenen auf dieser dritten senkrecht.

Steht (Fig. 124.) die Durchschnittslinie AB der beiden Ebenen LM und BC auf der Ebene GFH senkrecht, so sind jene zwei Ebenen durch die Durchschnittslinie gelegt, weil sie beiden gemeinschaftlich ist, und deßhalb sind sie auf der dritten Ebene GFH senkrecht (Lehrs.).

VII. Zusatz: Zwei Ebenen, die einander schneiden, stehen auf der Ebene ihres Neigungswinkels senkrecht.

Wenn sich (Fig. 124.) die beiden Ebenen LM und BC in der geraden Linie AB schneiden, so steht diese auf der Ebene GFH des Neigungswinkels senkrecht (Zus. V.), weßhalb die beiden Ebenen selbst auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht stehen (Zus. VI.).

§. 178.

VI. Lehrsatz:

Wenn zwei Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht stehen, so steht auch die Durchschnittslinie der beiden ersten Ebenen auf der dritten senkrecht.

Beweis:

1) Wenn (Fig. 133.) die beiden Ebenen ACB und und ABD auf der Ebene LM senkrecht stehen, und sich in der Linie AB schneiden, so ziehe man von einem gemeinschaftlichen Punkte A der Durchschnittslinie AB in einer jeden Ebene auf ihre Durchschnittslinien mit der Ebene LM, also auf BC und BD die Perpendikel Am und An, so steht jedes dieser Perpendikel auf der Ebene LM senkrecht (§. 177. Zus. I.);

2) Von dem Punkte A gibt es auf die Ebene LM nur ein einziges Perpendikel (§. 173. Zus. I.), und dieses kann nur die gemeinschaftliche Durchschnittslinie AB sein, weil diese allein in den beiden Ebenen ACB und ADB liegt; weßhalb die Durchschnittslinie AB dieser beiden Ebenen auch auf der Ebene LM senkrecht steht.

I. Zusatz: Wenn (Fig. 133.) die Durchschnittslinie AB der beiden Ebenen ABC und ABD auf einer dritten Ebene LM senkrecht steht, so ist der Winkel CBD, welchen ihre Durchschnittslinien BC und BD bilden, der Neigungswinkel der beiden Ebenen ABC und ABD.

ABD. Denn AB steht auf LM senkrecht (per hyp.), mithin ist ABC = R, und ABD = R (§. 169. a.); ferner liegt BC zugleich in der Ebene ABC, und BD zugleich in der Ebene ABD, weßhalb CBD der Neigungswinkel der beiden Ebenen ABC und ABD ist (§. 176. Zus. III.).

II. Zusatz: Wenn (Fig. 133.) eine Ebene LM auf zwei andern Ebenen ACB und ADB, die einander in AB schneiden, senkrecht steht, so geben die Durchschnittslinien BC und BD der beiden Ebenen mit der Ebene LM den Neigungswinkel eben dieser Ebenen, das ist, CBD ist der Neigungswinkel der Ebenen ABC und ABD. Denn AB steht auf der Ebene LM senkrecht (Lehrs.), folglich ist CBD der Neigungswinkel der Ebenen ABC und ABD (Zus. I.).

§. 179.

Parallelebenen.

Zwei Ebenen, die, wie immer verlängert, nie einander schneiden, heissen Parallelebenen.

I. Zusatz: Wenn eine gerade Linie auf zwei Ebenen zugleich senkrecht steht, so sind die Ebenen parallel; indem sonst die gerade Linie, wenn sich nämlich die Ebenen schneiden würden, auf diese zwei Ebenen nicht zugleich senkrecht sein könnte (§. 169. Zus. III.).

II. Zusatz: Die Durchschnittslinien zweier Parallelebenen mit einer dritten Ebene sind unter sich parallel.

Denn sind (Fig. 135.) die beiden Ebenen BE und DF unter sich parallel, und schneiden sie die Ebene LM in den geraden Linien BA und DC, so liegen diese zwei Linien in der Ebene LM, und können verlängert nie zusammen stoßen, weil sonst die Ebenen BE und DF selbst, in welchen sie liegen, zusammen stoßen würden, und deßhalb nicht parallel wären; d. h., die beiden Durchschnittslinien BA und DC der Parallelebenen BE und DF sind unter sich parallel.

III. Zusatz: Wenn eine gerade Linie die eine Parallelebene schneidet, so schneidet sie verlängert auch die andere.

Wenn (Fig. 134.) die Ebene MN parallel ist mit KL, und die gerade Linie AG die eine Parallelebene

MN im Punkte A schneidet, und man zieht von den Punkten A und G auf die Ebene KL die Perpendikel AB und GF, so sind diese parallel (§. 172. A.), und liegen in der nämlichen Ebene ABFD (§. 37. b.), welche die Ebene MN in einer geraden Linie AD schneidet (§. 168. Zus. II.), weßhalb AD # BF (Zus. II.); nun schneidet aber die Linie AG die Parallele AD im Punkte A, also verlängert auch die andere Parallele BF (§. 41. Zus. II.), mithin ebenfalls die Ebene KL, in welcher sie liegt.

IV. Zusatz: Wenn eine Ebene die eine von zwei Parallelebenen schneidet, so schneidet sie verlängert auch die andere.

Denn wenn (Fig. 134.) die Ebene DAG die Parallelebene MN schneidet, so schneidet die gerade Linie AG verlängert die andere Parallelebene KL (Zus. III.), mithin schneidet auch die Ebene DAG, in welcher AG liegt, verlängert die Ebene KL.

V. Zusatz: Zwei Parallelebenen stehen in allen Punkten gleich weit von einander ab.

Denn man fälle (Fig. 134.) aus zwei beliebigen Punkten C und A der einen Parallelebene MN auf die andere KL die Perpendikel CE und AB (§. 173.), so ist CE # AB (§. 172. A.), mithin liegen beide Perpendikel in der Ebene CABE (§. 37. b.), welche die zwei Parallelebenen MN und KL in den geraden Linien AC und BE schneidet, weßhalb auch AC # BE ist (§. 179. Zus. II.), mithin AB = CE (§. 41. Zus. IV.), das ist, die beiden Parallelebenen stehen in allen Punkten gleich weit von einander ab.

§. 180.

VII. Lehrsatz:

Wenn eine gerade Linie auf der einen von zwei Parallelebenen senkrecht steht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 134.) die Linie AB auf die Parallelebene KL senkrecht, und man ziehe in dieser

Ebene die zwei Linien BE und BF so, daß sie zusammen keinen geraden Winkel bilden (§. 7. Zus. I.), es ist ABE = R, und ABF = R (§. 169. a.);

2) Durch die drei Punkte A, B und E, und durch A, B und F lege man Ebenen (§. 168. b.), welche die obere Parallelebene in den geraden Linien AC und AD schneiden (§. 179. Zus. IV.);

3) Die Linie AC ist parallel mit BE, und AD ist parallel mit BF (§. 179. Zus. II.), weßhalb

$$\left.\begin{array}{r} \text{CAB} + \text{ABE} = 2\text{R} \\ \text{und DAB} + \text{ABF} = 2\text{R} \end{array}\right\} \text{§. 41.;}$$

4) Nach Nro. 1. ist aber ABE = R, und ABF = R, daher ist auch CAB = R, und DAB = R, das ist, die Linie AB steht auch auf der Parallelebene MN senkrecht (§. 170.).

§. 181.

III. Aufgabe, durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die mit einer andern Ebene parallel ist.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 134.) durch den Punkt A eine Ebene zu legen, die mit der Ebene KL parallel ist;

2) Aus A ziehe man auf die Ebene KL das Perpendikel AB (§. 173.), und in der Ebene KL die beiden beliebigen geraden Linien BE und BF, die zusammen keinen geraden Winkel bilden (§. 7. Zus. I.);

3) Durch A ziehe man mit BE in der Ebene ABE die Parallele AC, und in der Ebene ABF mit BF die Parallele AD (§. 39.), und lege durch die drei Punkte C, A und D die Ebene MN, so ist diese mit der Ebene KL die verlangte Parallelebene.

Beweis:

1) Die Linie AB ist auf KL senkrecht (ex constr.), mithin ABE = R, und ABF = R (§. 169. a.);

2) Ferner ist nach Nro. 3. der Auflösung AC # BE, und AD # BF, weßhalb (§. 41.)

$$\begin{array}{r} \text{CAB} + \text{ABE} = 2\text{R}, \\ \text{und DAB} + \text{ABF} = 2\text{R}, \end{array}$$

3) Nun ist aber ABE = R, und ABF = R, daher ist auch CAB = R, und DAB = R, das ist, die gerade Linie AB steht auch auf der Ebene MN senkrecht (§. 170.), und die Ebene MN ist durch den Punkt A parallel mit KL gelegt worden (§. 179. Zus. I.).

Zusatz: Durch einen Punkt gibt es mit einer Ebene nur eine einzige Parallelebene. Denn gäbe es (Fig. 134.) zur Ebene KL nebst der Ebene MN noch eine andere Parallelebene, so müßte das Perpendikel BA auch auf dieser Ebene senkrecht sein (§. 180.), und es gäbe durch den Punkt A auf zwei sich schneidende Ebenen ein Perpendikel, welches nicht möglich ist (§. 169. Zus. I.).

§. 182.

VIII. Lehrsatz:

Die Neigungswinkel, welche zwei Parallelebenen auf einer Seite mit einer dritten Ebene bilden, sind gleich.

Beweis:

1) Es schneiden (Fig. 135.) die beiden Parallelebenen BE und DF die Ebene LM in den Linien AB und CD, es ist AB # CD (§. 179. Zus. II.);

2) Durch G errichte man in der Ebene LM auf AB das Perpendikel GM, so wird dieses auch die Parallele CD schneiden (§. 41. Zus. II.);

3) Ferner errichte man durch G in der Ebene BE auf AB das Perpendikel KG, so ist KGM der Neigungswinkel der beiden Ebenen BE und LM (§. 176. Zus. III.), und BG oder BA steht auf der Ebene KGM des Neigungswinkels senkrecht (§. 177. Zus. V.);

4) Die Ebene KGM schneidet die eine Parallelebene BE in der Linie KG, mithin auch die andere Parallelebene DF in einer geraden Linie HP (§. 179. Zus. IV.), und DH oder DC steht nach Nro. 1. auch auf der Ebene KGM senkrecht (§. 172. B.); weßhalb DHM = R, und DHP = R (§. 169. a.), und PHM ist der Neigungswinkel der beiden Ebenen DF und LM (§. 176. Zus. III.);

5) Die beiden Parallelebenen BE und DF werden durch die Ebene KGM in den Parallellinien GK und HP geschnitten (§. 179. Zus. II.), bei welchen der innere Winkel KGM seinem äußeren entgegengesetzten Winkel PHM gleich ist (§. 41.) und diese beiden Winkel sind nach Nro. 3 und 4. die Neigungswinkel der beiden Parallelebenen BE und DF zur Ebene LM.

Es sind also die Neigungswinkel KGM und PHM, welche die zwei Parallelebenen BE und DF auf der nämlichen Seite mit der Ebene LM bilden, einander gleich.

Zusatz: Wenn man (Fig. 135.) die Linie MG gegen G hin verlängert, so erhält man auf der andern Seite in Absicht auf die beiden Parallelebenen BE und DF die Neigungswinkel QGK und GHP, die ebenfalls einander gleich sind; denn

$$\left.\begin{array}{r} QGK + KGM = 2R \\ \text{und } GHP + PHM = 2R \end{array}\right\} \text{§. 8. Zus. III.}$$

$$\overline{\text{also } QGK = GHP, \text{ weil } KGM = PHM \text{ (Lehrs.)}.}$$

Anmerkung: 1) Stehen die beiden Parallelebenen auf der dritten Ebene senkrecht, so bilden sie nach jeder Seite hin Neigungswinkel, von welchen jeder ein rechter Winkel ist (§. 176. Zus. IV.).

2) Stehen die beiden Parallelebenen auf der dritten Ebene schief, so bilden sie mit dieser Ebene schiefe Neigungswinkel (§. 8. b.), nämlich nach einer Seite hin zwei spitzige und nach der andern zwei stumpfe Winkel, und durch die spitzigen, wie durch die stumpfen Winkel ist die Neigung der Parallelebenen zur dritten Ebene bestimmt; man nimmt aber gewöhnlich die spitzigen Winkel zur Bestimmung der Neigung zweier Ebenen zu einander.

§. 183.

IX. Lehrsatz:

Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie eine dritte Ebene in parallelen Linien schneiden, und nach einer Seite hin gleiche Neigungswinkel bilden.

Beweis:

1) Wenn (Fig. 135.) die beiden Ebenen BE und DF die Ebene LM in den Parallelen AB und CD

schneiden, so ziehe man vom Punkte G auf AB in der Ebene LM das Perpendikel GM, es wird dieses auch die Parallele CD schneiden (§. 41. Zus. II.);

2) Durch G ziehe man in der Ebene BE auf AB das Perpendikel GK, so ist der Winkel KGM der Neigungswinkel der Ebenen BE und LM (§. 176. Zus. III.), und BA steht auf der Ebene KGM dieses Neigungswinkels senkrecht (§. 177. Zus. V.);

3) Die Ebene KGM stoßt mit der Ebene DF im Punkte H zusammen, und schneidet deßhalb diese Ebene in einer geraden Linie HP (§. 168. Zus. II.), und die Parallele DC steht, wie BA, auf der Ebene KGM senkrecht (§. 172. B.), weßhalb PHD = R = DHM (§. 169. a.), und PHM ist der Neigungswinkel der Ebenen DF und LM (§. 176. Zus. III.);

4) Nach der Voraussetzung sind die Neigungswinkel einander gleich, somit ist KGM = PHM, und GK ♯ HP, weil auch beide Linien als Durchschnittslinien in der Neigungsebene KGM liegen (§. 38.);

5) Nun errichte man in dieser Neigungsebene durch H auf PH das Perpendikel HN, so ist dieses auch auf GK senkrecht, weil GK ♯ HP, und GNH = NHP (§. 41.), und also GNH = R, gleichwie NHP ein rechter Winkel ist (§. 8. c. u. d.);

6) Die gemeinschaftliche Neigungsebene KGM steht auf der Ebene BE, und auf der Ebene DF senkrecht (§. 177. Zus. VII.), daher steht die Linie HN auf der Ebene BE und DF zugleich senkrecht (§. 177. Zus. I. und III.), und die Ebenen BE und DF sind parallel (§. 179. Zus. I.).

Es sind also die beiden Ebenen BE und DF parallel, weil sie eine dritte Ebene LM in parallelen Linien AB und CD schneiden, und nach einer Seite hin die gleichen Neigungswinkel KGM und PHM bilden.

Inhalt.

Einleitung in die Geometrie.

Vorläufige Begriffe . . . . . Seite 1. §. 1. bis §. 6.

I. Theil der Geometrie. Die Longimetrie.

I. Hauptstück. Erste Begriffe und Lehrsätze.

I. Abschnitt.

Von geradlinigten Winkeln und Figuren S. 9. §. 7. — §. 13.

II. Abschnitt.

Vom Kreise . . . . S. 21. §. 14. — §. 17.

II. Hauptstück. Von der Lage und Größe gerader Linien.

I. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Dreiecken S. 31. §. 18. — §. 36.

II. Abschnitt.

Von Parallellinien . . . . . . S. 64. §. 37. — §. 45.

III. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Vierecken S. 80. §. 46. — §. 51.

IV. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Vielecken S. 92. §. 52. — §. 54.

V. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Betreff des Kreises, und vom Maaße der Winkel . . . S. 101. §. 55. — §. 78.

III. Hauptstück. Von Verhältnissen gerader Linien.

I. Abschnitt.

Von Verhältnissen gerader Linien in geradlinigten ebenen Figuren . . . . S. 129. §. 79. — §. 101.

II. Abschnitt.

Von Verhältnissen gerader Linien im Kreise S. 154. §. 102. — §. 110.

IV. Hauptstück. Von der Lage und den Verhältnissen der Kreislinien.

I. Abschnitt.

Von d. Lage d. Kreislinien gegen einander in einer Ebene S. 166 §. 111 — §. 118.

II. Abschnitt.

Von Verhältnissen der Kreislinien . S. 177. §. 119. — §. 134.

II. Theil der Geometrie. Die Planimetrie.

I. Hauptstück.

Von der Gleichheit und Verwandlung der Figuren S. 204. §. 135. — §. 151.

II. Hauptstück.

Von Verhältnissen, und von der Bestimmung des Flächeninhaltes der Figuren . . . . S. 221. §. 152. — §. 167.

III. Hauptstück.

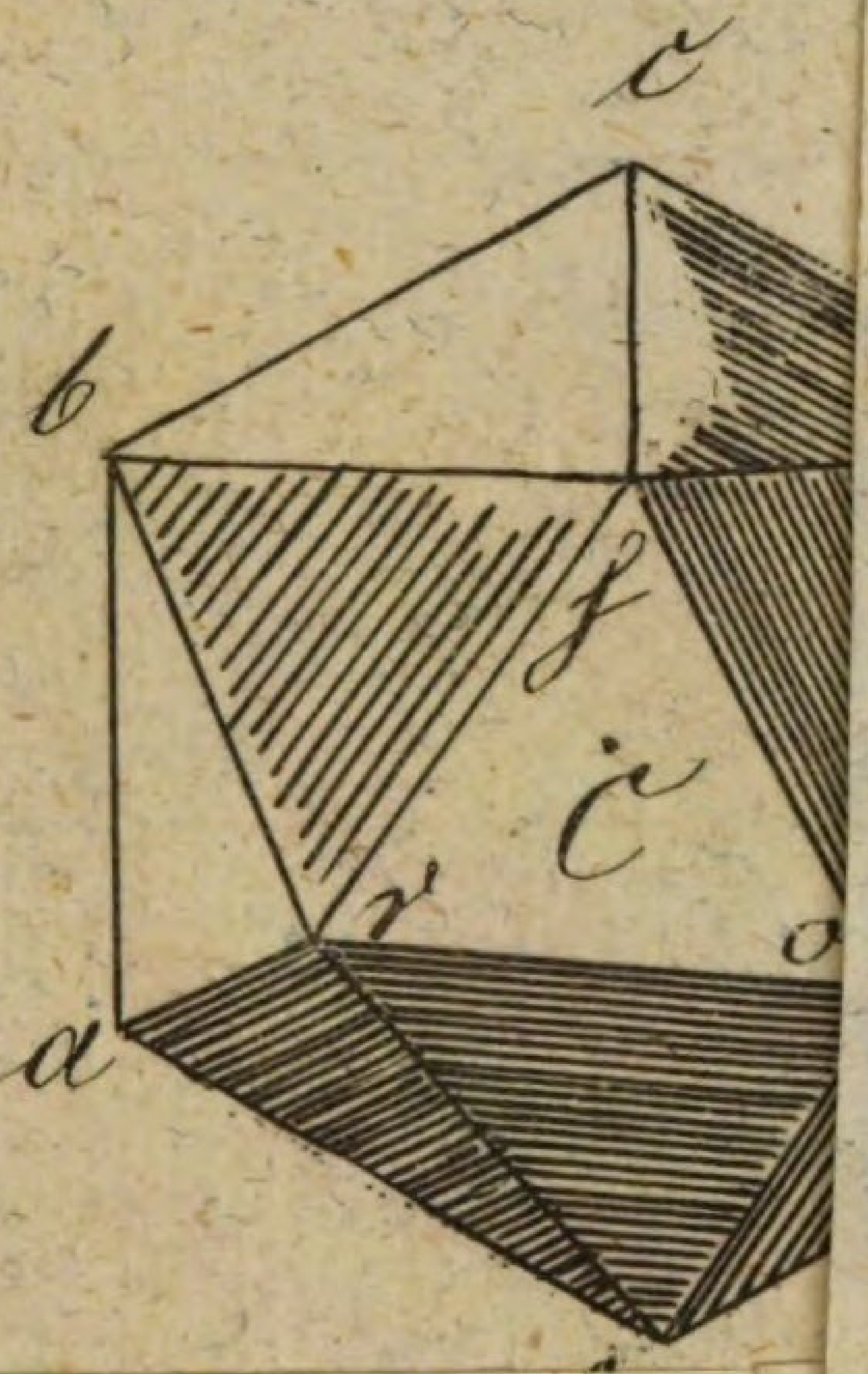
Von der Lage gerader Linien gegen Ebenen, und verschiedener Ebenen gegen einander . . . . . . S. 241. §. 168. — §. 183.

Verbesserung einiger Druckfehler.

Seite	Zeile	anstatt	lese man
49	22	ein spitziaer, stumpfer	ein stumpfer, spitziger
54	16	1) Es sei (Fig. 30.)	1) Es sei (Fig. 35.)
93	10	(Fig. 58.)	(Fig. 57.)
94	6	LGHGK	LGHJK
98	24	Winkel C	Winkel B
101	10	1) Man nehme	1) Man nehme (Fig. 58.)
107	29	$bhg = bgf$ und $baf = bfg$	$bhg < bgf$ und $baf < bfg$
108	6	Wenn der	Wenn (Fig. 63.) der
108	12	$ACE = ACB$	$ACE = 3ACB$
110	7	bis GE	bis G
114	21	$CH = GF$	$CH = CJ$
116	letzte	Punkt A	Punkt H
120	4	beim Winkel AFB	beim Winkel FAB
121	5	Bogen ACD	Bogen ADC
124	22	$+$	$-$
125	21	(§. 82. Zus.)	(§. 74. Zus. I.)
142	13	oder $ADE \cong ABC$	oder $ADE \sim ABC$
143	16	$\triangle abc \cong \triangle ADC$	$\triangle abc \sim \triangle ABC$
143	25	$ab : BC$	$bc : BC$
143	33	$AD : AC$	$AD : AB$
143	35	ABD	ABC
145	21	Winkel q	Winkel p
156	32	$\overline{y^2 = \sqrt{(x^2 - ax)}}$	$y = \sqrt{(x^2 - ax)}$
209	14	Parallelogramm $BC = AC$	Parallelogramm $BC = AE$
214	16	bis C	bis CH
221	27	$m \times ad$	$mn \times ad$
231	2	und $\triangle$ BCE	und $\triangle$ BCD.

Dann bei Figur 34 der Tabelle II. soll unten am Ende der Linie FB der Buchstabe Q stehen.

Fig. 4.



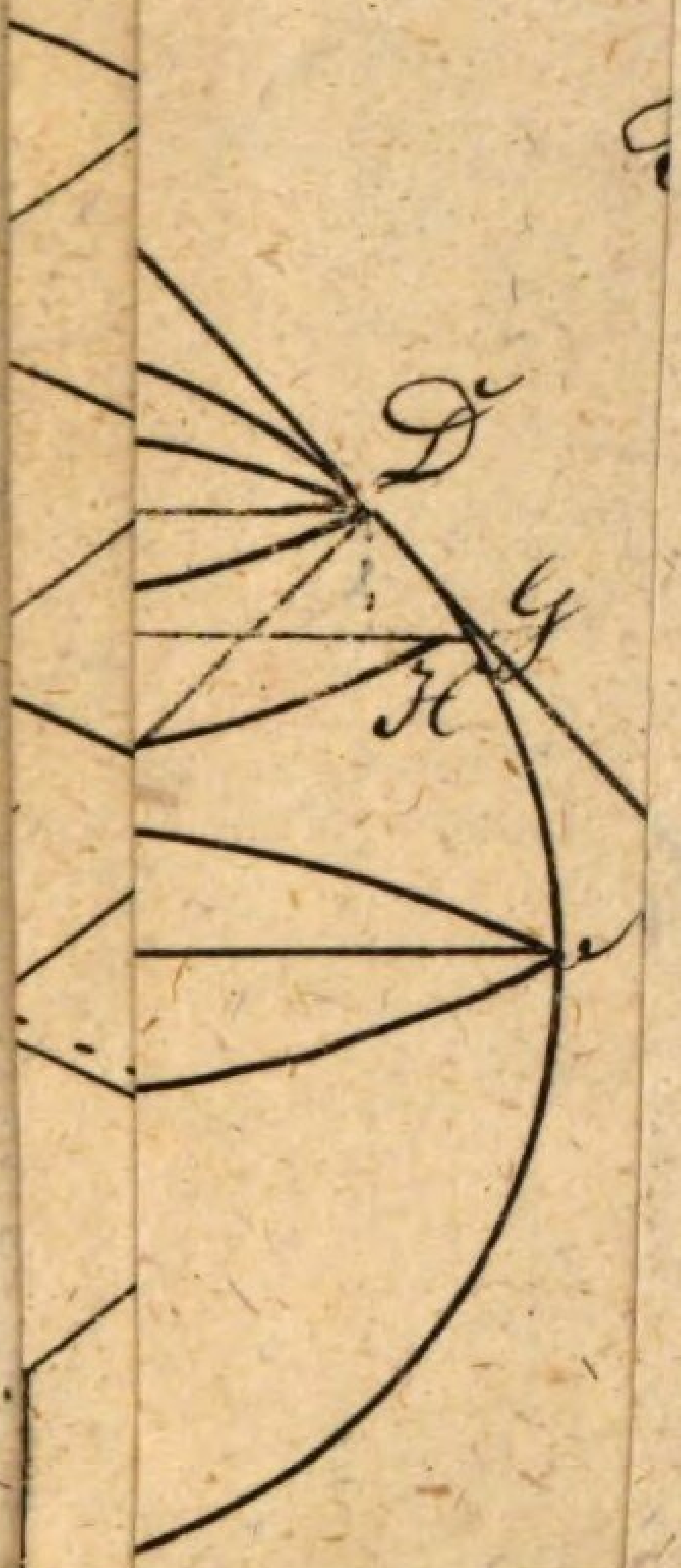

D
G
H

Fig. 3

38.

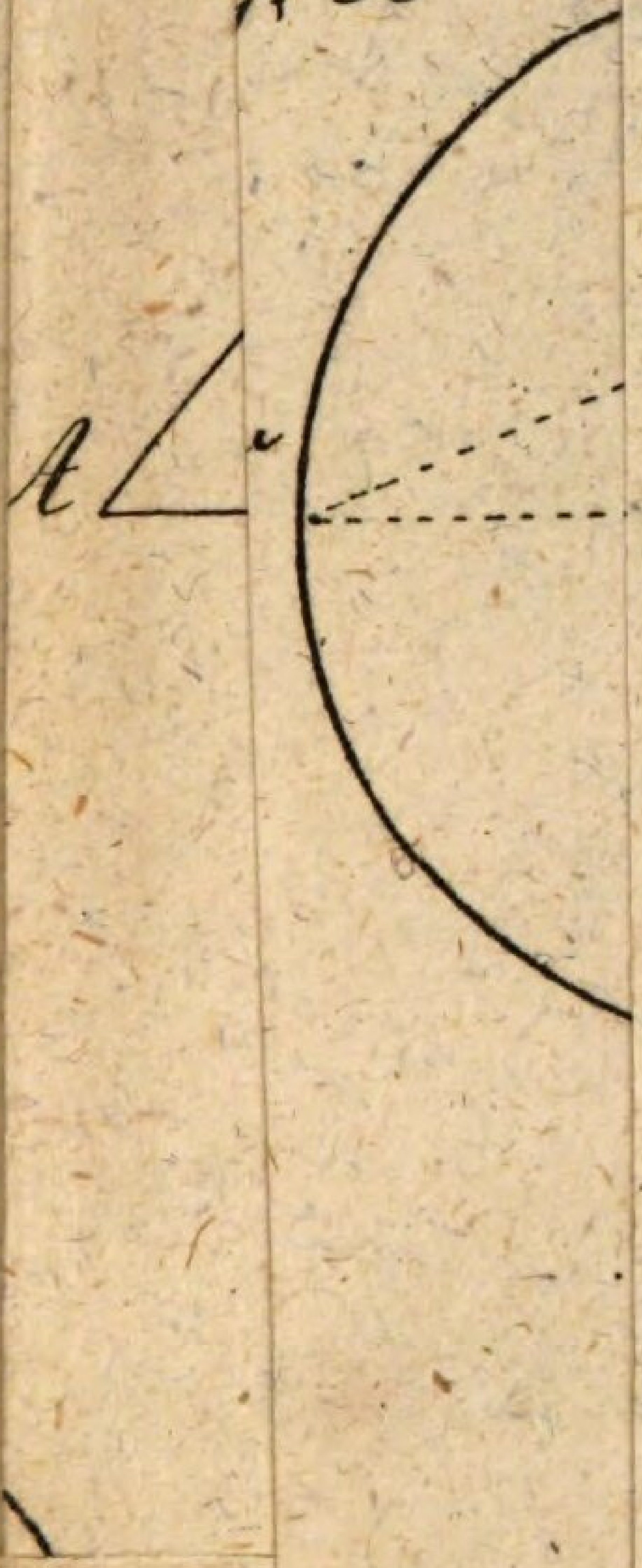
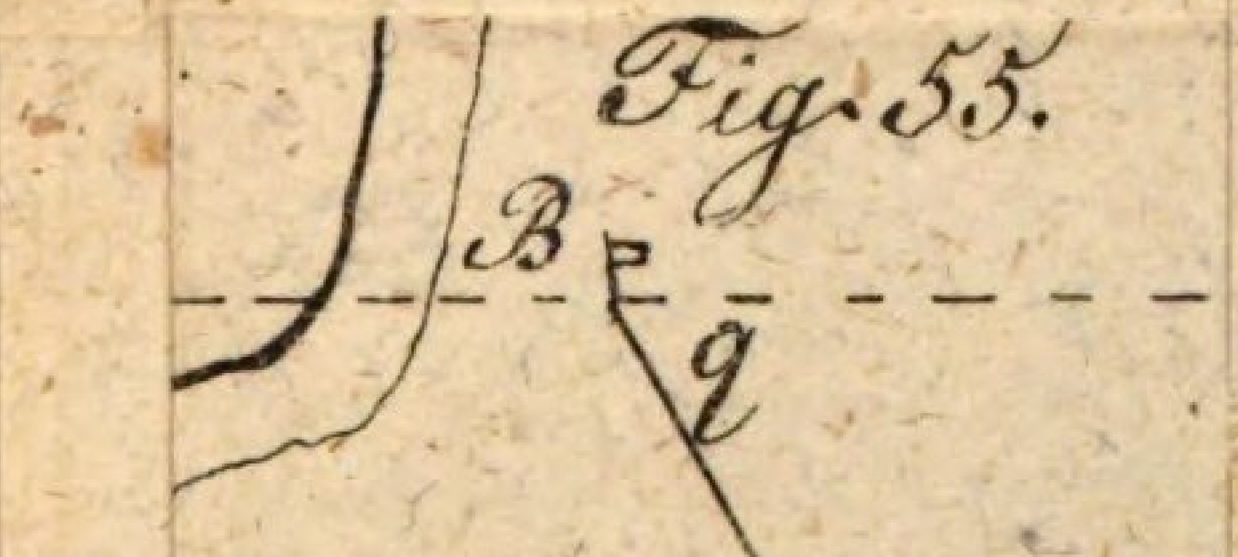
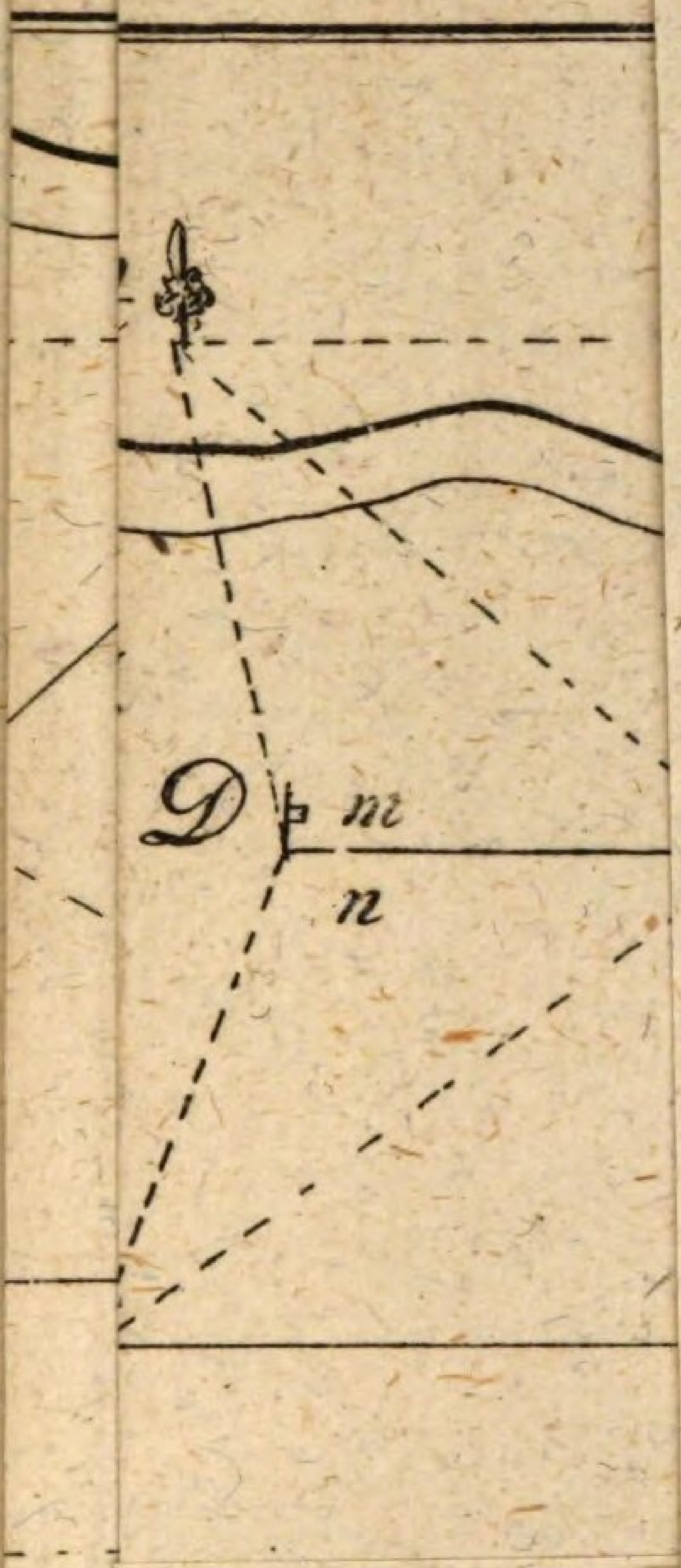
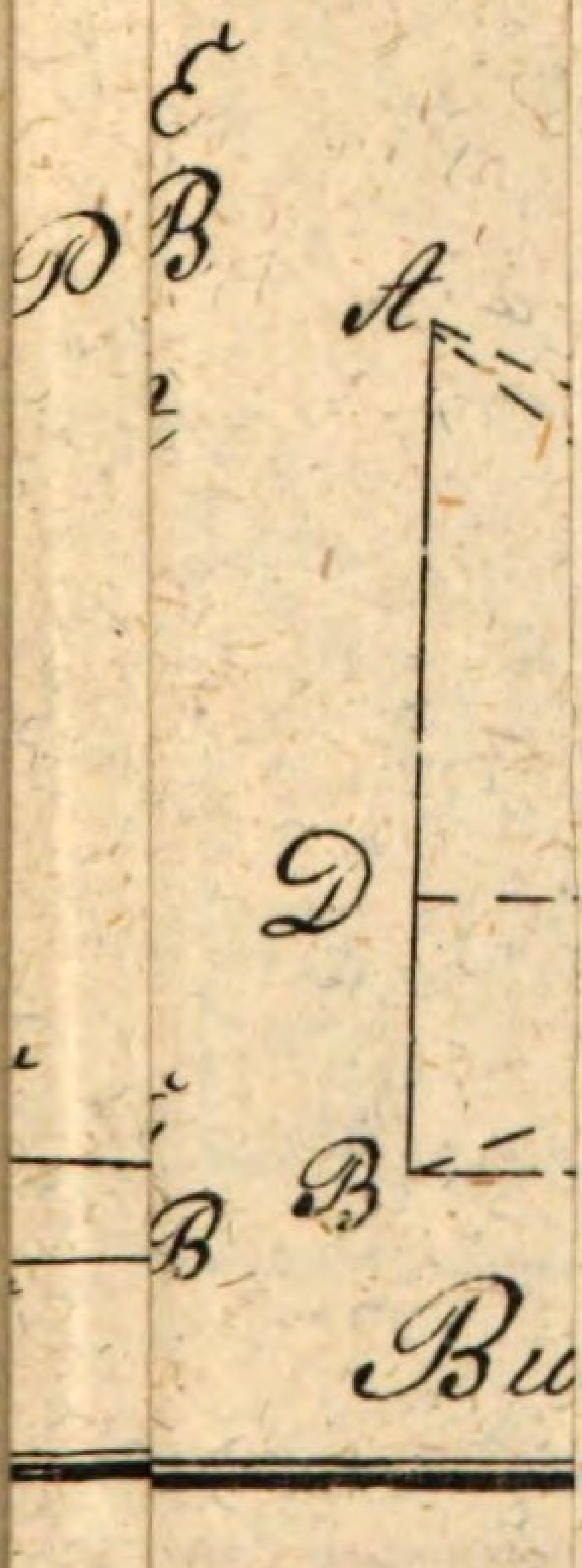


Fig. 55.

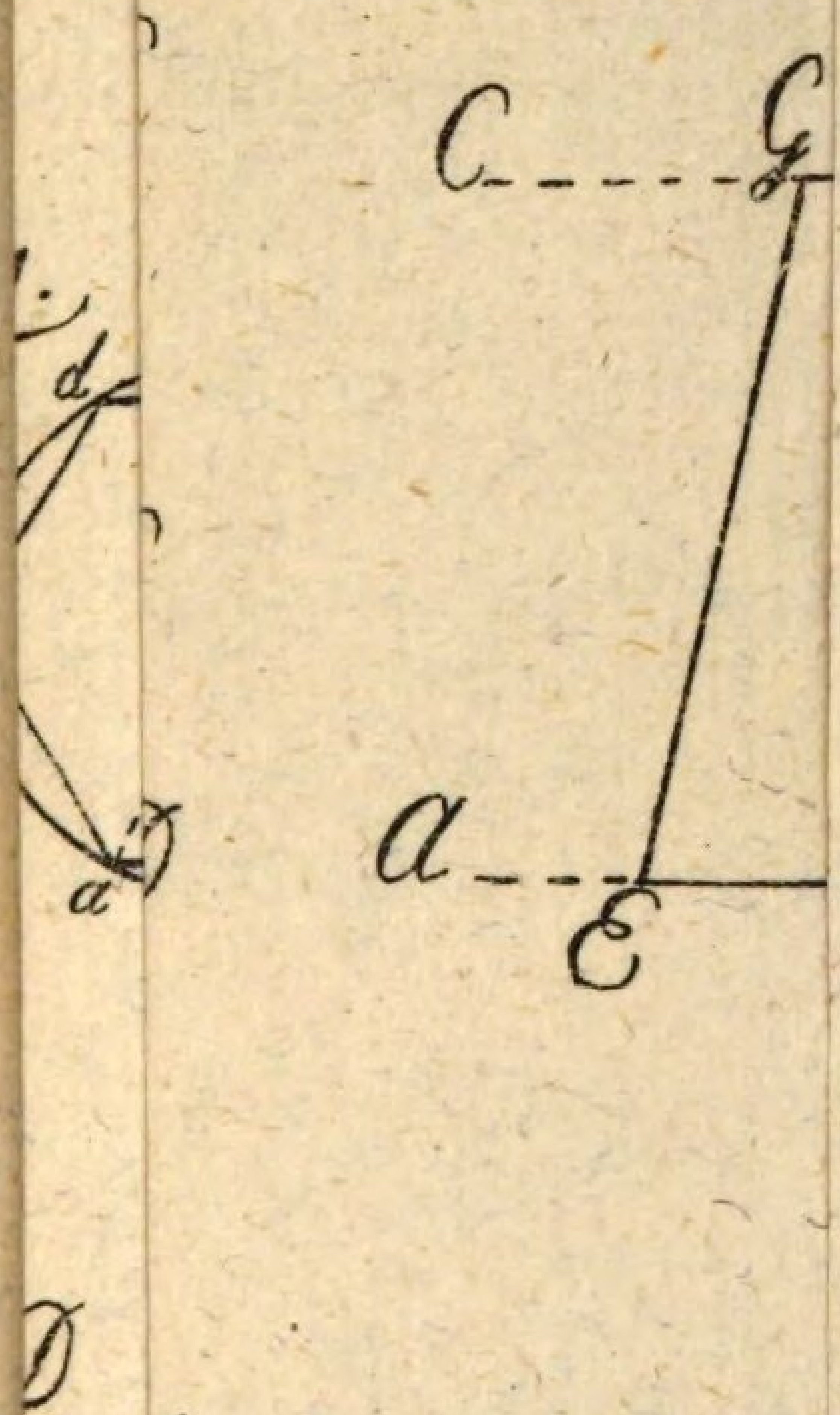


Bundschues


D
m
n

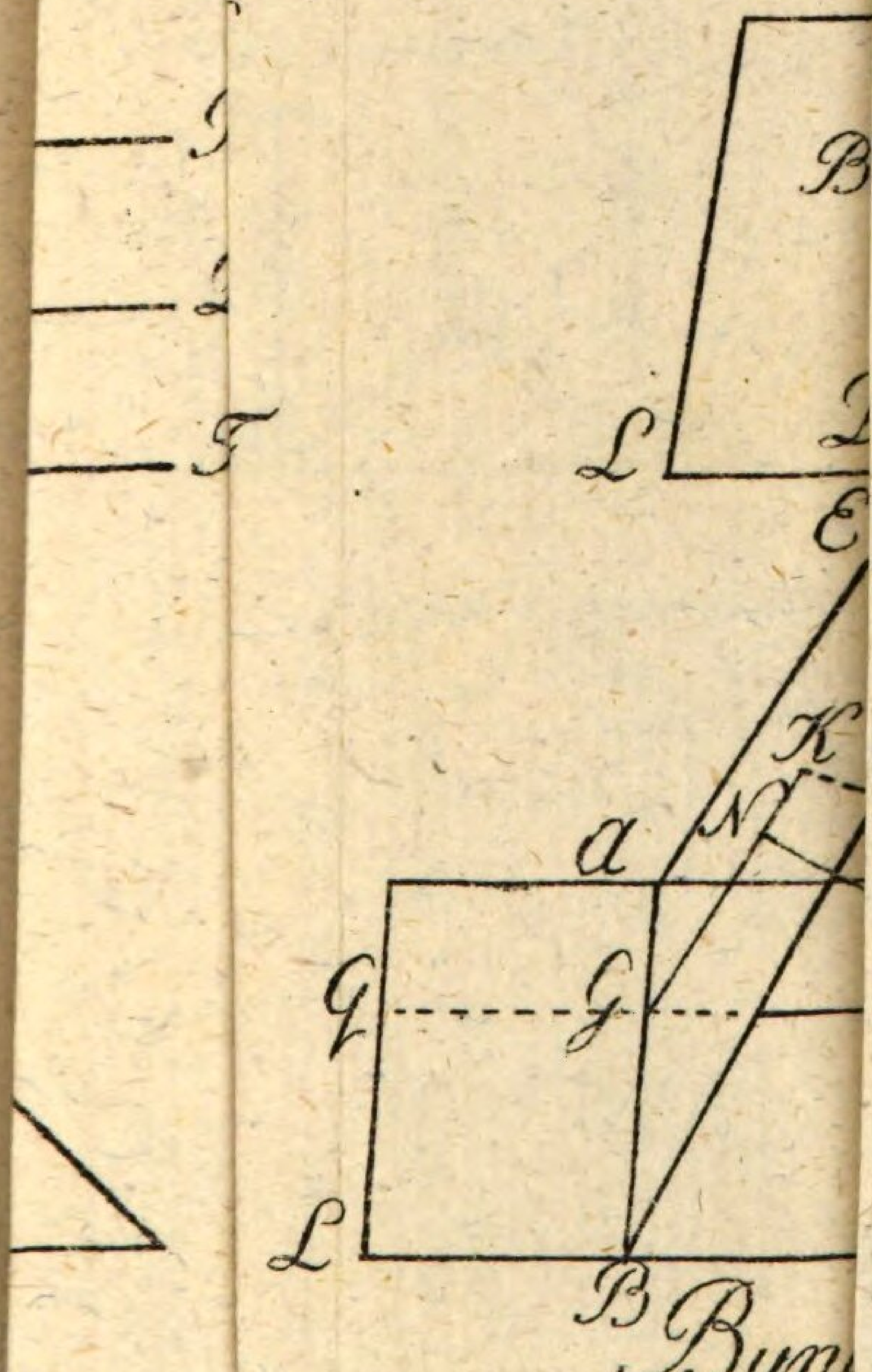


Bu



…. 108.

Fig.



Bun

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bundschue, Johann von Gott, 1784-1851

Lehrbuch der Geometrie und Trigonometrie zum Gebrauche in den Schulen und zum Selbstunterrichte

Bd.: 1

Kempten 1819

Math.p. 59 k-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081548-3